

VÕ QUỐC BÁ CẦN

TUYỂN  
CHỌN

# CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

Dành cho học sinh khối THCS và THPT  
Dành cho học sinh ôn thi vào lớp 10 THPT  
Tài liệu tham khảo cho học sinh và giáo viên



TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG  
TỔ TOÁN – TIN HỌC

# CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

*Thực hiện:* Võ Quốc Bá Cẩn

# Lời nói đầu



Bất đẳng thức là một trong những vấn đề hay và khó nhất của chương trình toán phổ thông bởi nó có mặt trên hầu khắp các lĩnh vực của toán học và nó đòi hỏi chúng ta phải có một vốn kiến thức tương đối vững vàng trên tất cả các lĩnh vực. Mỗi người chúng ta, đặc biệt là các bạn yêu toán, dù ít dù nhiều thì cũng đã từng đau đầu trước một bất đẳng thức khó và cũng đã từng có được một cảm giác tự hào khi mà mình chứng minh được bất đẳng thức đó. Nhằm “kích hoạt” niềm say mê bất đẳng thức trong các bạn, tôi xin giới thiệu với các bạn cuốn sách “chuyên đề bất đẳng thức”.

Sách gồm các phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới mà hiện nay chưa được phổ biến cho lắm. Ngoài ra, trong sách gồm một số lượng lớn bất đẳng thức do tôi tự sáng tác, còn lại là do tôi lấy đề toán trên internet nhưng chưa có lời giải hoặc có lời giải nhưng là lời giải hay, lạ, đẹp mắt. Phần lớn các bài tập trong sách đều do tôi tự giải nên không thể nào tránh khỏi những ngộ nhận, sai lầm, mong các bạn thông cảm.

Hy vọng rằng cuốn sách sẽ giúp cho các bạn một cái nhìn khác về bất đẳng thức và mong rằng qua việc giải các bài toán trong sách sẽ giúp các bạn có thể tìm ra phương pháp của riêng mình, nâng cao được tư duy sáng tạo. Tôi không biết các bạn nghĩ sao nhưng theo quan điểm của bản thân tôi thì nếu ta học tốt về bất đẳng thức thì cũng có thể học tốt các lĩnh vực khác của toán học vì như đã nói ở trên bất đẳng thức đòi hỏi chúng ta phải có một kiến thức tổng hợp tương đối vững vàng. Tôi không nói suông đâu, chắc hẳn bạn cũng biết đến anh Phạm Kim Hùng, sinh viên hệ CNTT khoa toán, trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, người đã được tham dự hai kỳ thi IMO và đều đoạt kết quả cao nhất trong đội tuyển VN. Bạn biết không? Trong thời học phổ thông, anh ấy chỉ chuyên tâm rèn luyện bất đẳng thức thôi. (Các bạn lưu ý là tôi không khuyến khích bạn làm như tôi và anh ấy đâu nhé!)

Mặc dù đã cố gắng biên soạn một cách thật cẩn thận, nhưng do trình độ có hạn nên không thể tránh khỏi những sai sót, mong các bạn thông cảm và góp ý cho tôi để cuốn sách ngày càng được hoàn thiện hơn. Chân thành cảm ơn.

Mọi đóng góp xin gửi về một trong các địa chỉ sau:

+ Võ Quốc Bá Cẩn, C65 khu dân cư Phú An, phường Phú Thứ, quận Cái Răng, thành phố Cần Thơ.

( 071.916044

+ Email. [babylearnmath@yahoo.com](mailto:babylearnmath@yahoo.com)

Kính tặng các thầy Đặng Bảo Hòa, Phan Đại Nhơn, Trần Diệu Minh, Huỳnh Bửu Tính, cô Tạ Thanh Thủy Tiên và toàn thể các thầy cô giáo trong tổ Toán Tin, thân tặng các bạn cùng lớp.

# MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

## 1. Bất đẳng thức AM-GM.

Nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm thì

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

## 2. Bất đẳng thức AM-HM.

Nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương thì

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \geq \frac{1}{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

## 3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.

Cho  $2n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Khi đó, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$ .

## 4. Bất đẳng thức Minkowski.

Cho  $2n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Khi đó với mọi  $r \geq 1$ , ta có

$$\left( \sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} + \left( \sum_{i=1}^n b_i^r \right)^{\frac{1}{r}}$$

## 5. Bất đẳng thức AM-GM mở rộng.

Nếu  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực không âm và  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  là các số thực không âm có tổng bằng 1 thì

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n \geq a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} \dots a_n^{\beta_n}$$

## 6. Bất đẳng thức Chebyshev.

Cho  $2n$  số thực  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Khi đó

a) Nếu  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$  thì

$$n \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

a) Nếu  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$  thì

$$n \cdot \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} a_1 = a_2 = \dots = a_n \\ b_1 = b_2 = \dots = b_n \end{cases}$

### 7. Bất đẳng thức Holder.

Cho  $2n$  số thực không âm  $a_1, a_2, \dots, a_n$  và  $b_1, b_2, \dots, b_n$ . Khi đó với mọi  $p, q > 1$  thỏa

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \text{ ta có}$$

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

### 8. Bất đẳng thức Schur.

Với mọi bộ ba số không âm  $a, b, c$  và  $r \geq 0$ , ta luôn có bất đẳng thức

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

### 9. Bất đẳng thức Jensen.

Giả sử  $f(x)$  là một hàm lồi trên  $[a, b]$ . Khi đó, với mọi  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  và  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$  thỏa  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$  ta có bất đẳng thức

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)$$

### 10. Bất đẳng thức sắp xếp lại.

Cho 2 dãy đơn điệu cùng tăng  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  và  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ . Khi đó, với  $i_1, i_2, \dots, i_n$  là một hoán vị bất kì của  $1, 2, \dots, n$  ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + \dots + a_{i_n} b_{i_n} \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$$

### 11. Bất đẳng thức Bernulli.

Với  $x > -1$ , ta có

$$+\text{Nếu } r \geq 1 \vee r \leq 0 \text{ thì } (1+x)^r \geq 1+rx$$

$$+\text{Nếu } 1 > r > 0 \text{ thì } (1+x)^r \leq 1+rx$$

# BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

## 1. Mở đầu.

Hầu hết các bất đẳng thức cổ điển (AM-GM, Bunhiacopxki, Holder, Minkowsky, Chebyshev ...) đều là các bất đẳng thức thuần nhất. Điều này hoàn toàn không ngẫu nhiên. Về logic, có thể nói rằng, chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh với nhau một cách toàn cục được.

Chính vì thế, bất đẳng thức thuần nhất chiếm một tỷ lệ rất cao trong các bài toán bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức đại số (khi các hàm số là hàm đại số, có bậc hữu hạn). Đối với các hàm giải tích (mũ, lượng giác, logarith), các bất đẳng thức cũng được coi là thuần nhất vì các hàm số có bậc  $\infty$  (theo công thức Taylor).

Trong bài này, chúng ta sẽ đề cập tới các phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất, cũng như cách chuyển từ một bất đẳng thức không thuần nhất về một bất đẳng thức thuần nhất. Nắm vững và vận dụng nhuần nhuyễn các phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh được hầu hết các bất đẳng thức sơ cấp.

## 2. Bất đẳng thức thuần nhất.

Hàm số  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  của các biến số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$  được là hàm thuần nhất bậc  $\alpha$  nếu với mọi số thực  $t$  ta có

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Bất đẳng thức dạng

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$$

với  $f$  là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc  $\alpha$ ).

Ví dụ các bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Bunhiacopxki, bất đẳng thức Chebyshev là các bất đẳng thức thuần nhất. Bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức  $\sin x < x$  với  $x > 0$  là các bất đẳng thức không thuần nhất.



### 3. Chứng minh bất đẳng thức thuần nhất.

#### 3.1. Phương pháp dồn biến.

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản  $x^2 \geq 0$ !). Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (1)$$

Ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right) \quad (2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, \dots, x_n\right) \quad (3)$$

Sau đó chuyển việc chứng minh (1) về việc chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_1, x_3, \dots, x_n) = g(x_1, x_3, \dots, x_n) \geq 0 \quad (4)$$

tức là một bất đẳng thức có số biến ít hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (2), (3) có thể không đúng hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi 2 biến số nên thông thường thì tính đúng đắn của bất đẳng thức này có thể kiểm tra được dễ dàng.

#### Ví dụ 1.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

#### Chứng minh.

Xét hàm số  $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2)$

Ta có

$$f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \left(b+c - \frac{5a}{4}\right)(b-c)^2$$



Do đó, nếu  $a = \min\{a, b, c\}$  (điều này luôn có thể giả sử) thì ta có

$$f(a, b, c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$f(a, b, b) \geq 0$$

Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + 2b^3 + 3ab^2 - (a^2b + a^2b + b^2a + b^3 + b^2a + b^3) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + ab^2 - 2a^2b \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)^2 \geq 0$$

### Ví dụ 2. (Vietnam TST 1996)

Cho  $a, b, c$  là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$F(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4) \geq 0$$

#### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} F(a, b, c) - F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) &= \\ &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4) - \\ &\quad - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 - (b+c)^4 + \frac{4}{7} \cdot \left(a^4 + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right) \\ &= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 + \frac{4}{7} \cdot \left(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\right) \\ &= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + 2c^2 - (b+c)^2) + \frac{3}{7} \left(b^4 + c^4 - \frac{(b+c)^4}{8}\right) \\ &= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \\ &= 3a(a+b+c)(b-c)^2 + \frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \end{aligned}$$

Số hạng  $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc)$  luôn không âm. Nếu  $a, b, c$  cùng dấu thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu  $a, b, c$  không cùng dấu thì phải có ít nhất 1 trong ba số  $a, b, c$  cùng dấu với  $a+b+c$ . Không mất tính tổng quát, giả sử đó là  $a$ .

Từ đẳng thức trên suy ra  $F(a, b, c) \geq F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ . Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh

$$F(a, b, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^4 + (2b)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + 2b^4) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$$

Nếu  $b=0$  thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu  $b \neq 0$ , chia hai vế của bất đẳng thức cho  $b^4$  rồi đặt  $x = \frac{a}{b}$  thì ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể chứng minh như sau

$$\text{Xét } f(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2)$$

Ta có

$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \frac{16}{7} \cdot x^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \cdot x \Leftrightarrow x = -2.9294$$

$$f_{\min} = f(-2.9294) = 0.4924 > 0$$

(Các phần tính toán cuối được tính với độ chính xác tới 4 chữ số sau dấu phẩy. Do  $f_{\min}$  tính được là 0.4924 nên nếu tính cả sai số tuyệt đối thì giá trị chính xác của  $f_{\min}$  vẫn là một số dương. Vì đây là một bất đẳng thức rất chặt nên không thể tránh

được các tính toán với số lẻ trên đây. Chẳng hạn nếu thay  $\frac{4}{7}$  bằng  $\frac{16}{27}$  để  $x_{\min} = -3$

thì  $f_{\min}^*$  có giá trị âm! Ở đây  $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2)$ .

### 3.2. Phương pháp chuẩn hóa.

Dạng thường gặp của bất đẳng thức thuần nhất là

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

trong đó  $f$  và  $g$  là hai hàm thuần nhất cùng bậc.

Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq A$  với mọi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn điều kiện  $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = A$ . Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

#### Ví dụ 3. (Bất đẳng thức về trung bình lũy thừa)

Cho bộ  $n$  số thực dương  $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Với mỗi số thực  $r$  ta đặt

$$M_r(x) = \left( \frac{x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Chứng minh rằng với mọi  $r > s > 0$  ta có  $M_r(x) \geq M_s(x)$ .

#### Lời giải.

Vì  $M_r(tx) = tM_r(x)$  với mọi  $t > 0$  nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng cho các số thực dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn điều kiện  $M_s(x) = 1$ , tức là cần chứng minh  $M_r(x) \geq 1$  với mọi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn điều kiện  $M_s(x) = 1$ . Điều này có thể viết đơn giản lại là

Chứng minh  $x_1^r + x_2^r + \dots + x_n^r \geq n$  với  $x_1^s + x_2^s + \dots + x_n^s = n$ .

Để chứng minh bất đẳng thức cuối cùng, ta áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$x_i^r = (x_i^s)^{\frac{r}{s}} = (1 + (x_i^s - 1))^{\frac{r}{s}} \geq 1 + \frac{r}{s} \cdot (x_i^s - 1) \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được điều phải chứng minh.

#### Ví dụ 4. (VMO 2002)

Chứng minh rằng với  $x, y, z$  là các số thực bất kỳ ta có bất đẳng thức

$$6(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \leq 27xyz + 10(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

#### Lời giải.

Bất đẳng thức này rất công kênh. Nếu thực hiện phép biến đổi trực tiếp sẽ rất khó khăn (ví dụ thử bình phương để khử căn). Ta thực hiện phép chuẩn hóa để đơn giản hóa bất đẳng thức đã cho. Nếu  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ , thì  $x = y = z = 0$ , bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Nếu  $x^2 + y^2 + z^2 > 0$ , do bất đẳng thức đã cho là thuần nhất, ta có thể giả sử  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Ta cần chứng minh  $2(x+y+z) \leq xyz + 10$  với điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ . Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh

$$[2(x+y+z) - xyz]^2 \leq 100$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $|x| \leq |y| \leq |z|$ . Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky, ta có

$$\begin{aligned} [2(x+y+z) - xyz]^2 &= [2(x+y) + z(2-xy)]^2 \\ &\leq [(x+y)^2 + z^2][4 + (2-xy)^2] \\ &= (9 + 2xy)(8 - 4xy + x^2y^2) \\ &= 72 - 20xy + x^2y^2 + 2x^3y^3 \\ &= 100 + (xy+2)^2(2xy-7) \end{aligned}$$

Từ  $|x| \leq |y| \leq |z| \Rightarrow z^2 \geq 3 \Rightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \leq 6$ , tức là  $(xy+2)^2(2xy-7) \leq 0$ . Từ đây, kết hợp với đánh giá trên đây ta được điều cần chứng minh.

$$\text{Đấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} \frac{x+y}{2} = \frac{z}{2-xy} \\ xy+2=0 \end{cases}$$

Từ đây giải ra được  $x = -1, y = 2, z = 2$ .

Kĩ thuật chuẩn hóa cho phép chúng ta biến một bất đẳng thức phức tạp thành một bất đẳng thức có dạng đơn giản hơn. Điều này giúp ta có thể áp dụng các biến đổi đại số một cách dễ dàng hơn, thay vì phải làm việc với các biểu thức công kênh ban

đầu. Đặc biệt, sau khi chuẩn hóa xong, ta vẫn có thể áp dụng phương pháp dồn biến để giải. Ta đưa ra lời giải thứ hai cho bài toán trên

Đặt  $f(x, y, z) = 2(x + y + z) - xyz$ .

Ta cần chứng minh  $f(x, y, z) \leq 10$  với  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ .

Xét

$$\begin{aligned} f\left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}\right) - f(x, y, z) &= 2\left(\sqrt{2(y^2 + z^2)} - y - z\right) - \frac{x(y - z)^2}{2} \\ &= (y - z)^2 \left( \frac{2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)} + y + z} - \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

+ Nếu  $x, y, z > 0$ , ta xét hai trường hợp

\*  $1 \leq x \leq y \leq z$ . Khi đó

$$2(x + y + z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 < 10$$

\*  $0 < x \leq 1$ . Khi đó

$$2(x + y + z) - xyz \leq 2x + 2\sqrt{2(y^2 + z^2)} = 2x + 2\sqrt{2(9 - x^2)} = g(x)$$

Ta có  $g'(x) = \frac{2(\sqrt{9 - x^2} - x\sqrt{2})}{\sqrt{9 - x^2}} > 0$ , suy ra  $g(x) \leq g(1) = 10$ .

+ Nếu trong 3 số  $x, y, z$  có một số âm, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử là

$x < 0$ . Khi đó  $f\left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}\right) \geq f(x, y, z)$ , nên ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} f\left(x, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}, \sqrt{\frac{y^2 + z^2}{2}}\right) &\leq 10 \\ \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{2(9 - x^2)} - \frac{x(9 - x^2)}{2} &\leq 10 \\ \Leftrightarrow h(x) = x^3 - 5x + 4\sqrt{2(9 - x^2)} &\leq 20 \end{aligned}$$

Ta có  $h'(x) = 3x^2 - 5 - \frac{4x\sqrt{2}}{\sqrt{9 - x^2}}$ .

Giải phương trình  $h'(x) = 0$  (với  $x < 0$ ), ta được  $x = -1$ . Đây là điểm cực đại của  $h$ , do đó  $h(x) \leq h(-1) = 20$ .

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể đưa một bài toán bất đẳng thức về bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một hàm số trên một miền (chẳng hạn trên hình cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  như ở ví dụ 4). Điều này cho phép chúng ta vận dụng được một số kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (ví dụ như bất đẳng thức Jensen, hàm lồi,...).

### Ví dụ 5.

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

### Lời giải.

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số dương  $a, b, c$  thoả  $a+b+c=1$ .

Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\begin{aligned} & \frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1} + \frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1} + \frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1} \geq \frac{3}{5} \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2a^2-2a+1} + \frac{1}{2b^2-2b+1} + \frac{1}{2c^2-2c+1} \leq \frac{27}{5} \\ \Leftrightarrow & f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{27}{5} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Trong đó  $f(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$

Đề ý rằng  $\frac{27}{5} = 3f\left(\frac{1}{3}\right)$ , ta thấy (5.1) có dạng bất đẳng thức Jensen. Tuy nhiên, tính

đạo hàm cấp hai của  $f(x)$ , ta có

$$f''(x) = \frac{4(6x^2-6x+1)}{(2x^2-2x+1)^3}$$

hàm chỉ lồi trên khoảng  $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$  nên không thể áp dụng bất đẳng thức

Jensen một cách trực tiếp. Ta chứng minh  $f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{27}{5}$  bằng các nhận

xét bổ sung sau

$$f_{\max} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$$f(x) \text{ tăng trên } \left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ và giảm trên } \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{12}{7}$$

Nếu có ít nhất 2 trong 3 số  $a, b, c$  nằm trong khoảng  $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ , chẳng hạn là

$a, b$  thì áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(a) + f(b) \leq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 2f\left(\frac{1-c}{2}\right) = \frac{4}{c^2+1}$$

Như vậy trong trường hợp này, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{2c^2-2c+1} + \frac{4}{c^2+1} \leq \frac{27}{5}$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn ta được bất đẳng thức tương đương

$$27c^4 - 27c^3 + 18c^2 - 7c + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (3c-1)^2(3c^2-c+1) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Như vậy, ta chỉ còn cần xét trường hợp có ít nhất hai số nằm ngoài khoảng

$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ . Nếu chẳng hạn  $a \geq \frac{3+\sqrt{3}}{6}$  thì rõ ràng  $b, c \leq \frac{3-\sqrt{3}}{6}$  và như vậy,

do nhận xét trên  $f(a) + f(b) + f(c) \leq \frac{36}{7} < \frac{27}{5}$ .

Ta chỉ còn duy nhất một trường hợp cần xét là có hai số, chẳng hạn  $a, b \leq \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ .



Lúc này, do  $a+b \leq 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$  nên  $c \geq \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$ .

Theo các nhận xét trên, ta có

$$f(a) + f(b) + f(c) \leq 2f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{24}{7} + \frac{15+6\sqrt{3}}{13} < \frac{27}{5}.$$

### Ghi chú.

Bài toán trên có một cách giải ngắn gọn và độc đáo hơn như sau

Bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \leq \frac{6}{5}$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $a+b+c=1$ . Khi đó, bất đẳng thức viết lại thành

$$\frac{a(1-a)}{2a^2-2a+1} + \frac{b(1-b)}{2b^2-2b+1} + \frac{c(1-c)}{2c^2-2c+1} \leq \frac{6}{5}$$

Ta có  $2a(1-a) \leq \frac{(a+1)^2}{4}$ . Do đó  $1-2a+2a^2 \geq 1 - \frac{(a+1)^2}{4} = \frac{(1-a)(3+a)}{4}$ . Từ đó

$$\frac{a(1-a)}{2a^2-2a+1} \leq \frac{a(1-a)}{\frac{(1-a)(3+a)}{4}} = \frac{4a}{3+a}$$

Tương tự

$$\frac{b(1-b)}{2b^2-2b+1} \leq \frac{4b}{3+b}$$

$$\frac{c(1-c)}{2c^2-2c+1} \leq \frac{4c}{3+c}.$$

Và để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4a}{3+a} + \frac{4b}{3+b} + \frac{4c}{3+c} \leq \frac{6}{5}$$

Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với  $\frac{1}{3+a} + \frac{1}{3+b} + \frac{1}{3+c} \geq \frac{9}{10}$  là hiển

hiển (Áp dụng BĐT AM-GM).

Chuẩn hóa là một kỹ thuật cơ bản. Tuy nhiên, kỹ thuật đó cũng đòi hỏi những kinh nghiệm và độ tinh tế nhất định. Trong ví dụ trên, tại sao ta lại chuẩn hóa  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$  mà không phải là  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  (tự nhiên hơn)? Và ta có đạt được những hiệu quả mong muốn không nếu như chuẩn hóa  $x + y + z = 1$ ? Đó là những vấn đề mà chúng ta phải suy nghĩ trước khi thực hiện bước chuẩn hóa.

### 3.3. Phương pháp trọng số.

Bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Bunhiacopxki là những bất đẳng thức thuần nhất. Vì thế, chúng rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức thuần nhất. Tuy nhiên, do điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức này rất nghiêm ngặt nên việc áp dụng một cách trực tiếp và máy móc đôi khi khó đem lại kết quả. Để áp dụng tốt các bất đẳng thức này, chúng ta phải nghiên cứu kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng và áp dụng phương pháp trọng số.

#### Ví dụ 6.

Chứng minh rằng nếu  $x, y, z$  là các số thực không âm thì

$$6(-x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 27xyz \leq 10(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

#### Lời giải.

Sử dụng nguyên lý cơ bản “dấu bằng xảy ra khi một cặp biến số nào đó bằng nhau”, ta có thể tìm ta được dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra khi  $y = z = 2x$ . Điều này cho phép chúng ta mạnh dạn đánh giá như sau

$$\begin{aligned} & 10(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - 6(-x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = \\ & = (x^2 + y^2 + z^2) \left( 10(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - 6(-x + y + z) \right) \\ & = (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{10}{3} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} (1^2 + 2^2 + 2^2)^{\frac{1}{2}} - 6(-x + y + z) \right) \\ & \geq (x^2 + y^2 + z^2) \left( \frac{10}{3} \cdot (x + 2y + 2z) - 6(-x + y + z) \right) \\ & = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(28x + 2y + 2z)}{3} \end{aligned} \tag{6.1}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + 4\left(\frac{y^2}{4}\right) + 4\left(\frac{z^2}{4}\right) \geq 9\sqrt[9]{x^2\left(\frac{y^2}{4}\right)^4\left(\frac{z^2}{4}\right)^4} = 9\sqrt[9]{\frac{x^2 y^8 z^8}{4^8}}$$

$$28x + 2y + 2z = 7.4x + 2y + 2z \geq 9\sqrt[9]{(4x)^7(2y)(2z)} = 9\sqrt[9]{4^8 x^7 yz}$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$(x^2 + y^2 + z^2)(28x + 2y + 2z) \geq 9\sqrt[9]{\frac{x^2 y^8 z^8}{4^8}} \cdot 9\sqrt[9]{4^8 x^7 yz} = 81xyz \quad (6.2)$$

Từ (6.1) và (6.2) ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng cả bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức AM-GM có trọng số. Lời giải rất hiệu quả và ấn tượng. Tuy nhiên, sự thành công của lời giải trên nằm ở hai dòng ngắn ngủi ở đầu. Không có được “dự đoán” đó, khó có thể thu được kết quả mong muốn. Dưới đây ta sẽ xét một ví dụ về việc chọn các trọng số thích hợp bằng phương pháp hệ số bất định để các điều kiện xảy ra dấu bằng được thoả mãn.

### Ví dụ 7.

Chứng minh rằng nếu  $0 \leq x \leq y$  thì ta có bất đẳng thức

$$13x(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + 9x(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} \leq 16y^2$$

### Lời giải.

Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các tích ở vế trái. Tuy nhiên, nếu áp dụng một cách trực tiếp thì ta được

$$VT \leq \frac{13(x^2 + y^2 - x^2)}{2} + \frac{9(x^2 + y^2 + x^2)}{2} = 9x^2 + 11y^2 \quad (7.1)$$

Đây không phải là điều mà ta cần (Từ đây chỉ có thể suy ra  $VT \leq 20y^2$ ). Sở dĩ ta không thu được đánh giá cần thiết là vì dấu bằng không thể đồng thời xảy ra ở hai lần áp dụng bất đẳng thức AM-GM. Để điều chỉnh, ta đưa vào các hệ số dương  $a, b$  như sau

$$\begin{aligned}
 VT &= \frac{13(ax)(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{9(by)(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{b} \\
 &\leq \frac{13(a^2x^2 + y^2 - x^2)}{2a} + \frac{9(b^2x^2 + y^2 + x^2)}{2b} \quad (7.2)
 \end{aligned}$$

Đánh giá trên đúng với mọi  $a, b > 0$  (chẳng hạn với  $a = b = 1$  ta được (7.1)) và ta sẽ phải chọn  $a, b$  sao cho

- Vế phải không phụ thuộc vào  $x$
- Dấu bằng có thể đồng thời xảy ra ở hai bất đẳng thức

Yêu cầu này tương đương với hệ

$$\begin{cases} \frac{13(a^2 - 1)}{2a} + \frac{9(b^2 + 1)}{2b} = 0 \\ \exists x, y: \begin{cases} a^2x^2 = y^2 - x^2 \\ b^2x^2 = y^2 + x^2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Tức là có hệ } \begin{cases} \frac{13(a^2 - 1)}{2a} + \frac{9(b^2 + 1)}{2b} = 0 \\ a^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases} .$$

$$\text{Giải hệ ra, ta được } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} . \text{ Thay hai giá trị này vào (7.2) ta được}$$

$$VT \leq 13 \left( \frac{x^2}{4} + y^2 - x^2 \right) + 3 \left( \frac{9x^2}{4} + y^2 + x^2 \right) = 16y^2$$

### Ghi chú.

Trong ví dụ trên, thực chất ta đã cố định  $y$  và tìm giá trị lớn nhất của vế trái khi  $x$  thay đổi trong đoạn  $[0, y]$ .

### 4. Bất đẳng thức thuần nhất đối xứng.

Khi gặp các bất đẳng thức dạng đa thức thuần nhất đối xứng, ngoài các phương pháp trên, ta còn có thể sử dụng phương pháp khai triển trực tiếp và dụng định lý về nhóm các số hạng. Phương pháp này công kênh, không thật đẹp nhưng đôi lúc tỏ ra

khá hiệu quả. Khi sử dụng bằng phương pháp này, chúng ta thường dùng các ký hiệu quy ước sau để đơn giản hóa cách viết

$$\sum_{sym} Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\sigma} Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

trong đó,  $\sigma$  chạy qua tất cả các hoán vị của  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Ví dụ với  $n = 3$  và ba biến số  $x, y, z$  thì

$$\sum_{sym} x^3 = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$$

$$\sum_{sym} x^2y = x^2y + y^2z + z^2x + x^2z + z^2y + y^2x$$

$$\sum_{sym} xyz = 6xyz$$

Đối với các biểu thức không hoàn toàn đối xứng, ta có thể sử dụng ký hiệu hoán vị vòng quanh như sau

$$\sum_{cyc} x^2y = x^2y + y^2z + z^2x$$

Phương pháp này được xây dựng dựa trên tính so sánh được của một số tổng đối xứng cùng bậc - định lý về nhóm các số hạng (hệ quả của bất đẳng thức Karamata) mà chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh dưới đây. Trong trường hợp 3 biến, ta còn có đẳng thức Schur.

Nếu  $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$  và  $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$  là hai dãy số không tăng. Ta nói rằng  $s$  là

$$\text{trội của } t \text{ nếu } \begin{cases} s_1 + s_2 + \dots + s_n = t_1 + t_2 + \dots + t_n \\ s_1 + s_2 + \dots + s_i \geq t_1 + t_2 + \dots + t_i \quad \forall i = \overline{1, n} \end{cases}$$

### **Định lý Muirhead.** («Nhóm»)

Nếu  $s$  và  $t$  là các dãy số thực không âm sao cho  $s$  là trội của  $t$  thì

$$\sum_{sym} x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n} \geq \sum_{sym} x_1^{t_1} x_2^{t_2} \dots x_n^{t_n}$$

### **Chứng minh.**

Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu  $s$  là trội của  $t$  thì tồn tại các hằng số không âm  $k_\sigma$ , với  $\sigma$  chạy qua tập hợp tất cả các hoán vị của  $\{1, 2, \dots, n\}$ , có tổng bằng 1 sao cho

$$\sum_{\sigma} k_{\sigma} (s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)}, \dots, s_{\sigma(n)}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Sau đó, áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\sum_{\sigma} x_1^{s_{\sigma(1)}} x_2^{s_{\sigma(2)}} \dots x_n^{s_{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma, \tau} k_{\tau} x_1^{s_{\sigma(\tau(1))}} x_2^{s_{\sigma(\tau(2))}} \dots x_n^{s_{\sigma(\tau(n))}} \geq \sum_{\sigma} x_1^{t_{\sigma(1)}} x_2^{t_{\sigma(2)}} \dots x_n^{t_{\sigma(n)}}$$

Ví dụ, với  $s = (5, 2, 1)$  và  $t = (3, 3, 2)$ , ta có

$$(3, 3, 2) = \frac{3}{8} \cdot (5, 2, 1) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot (2, 1, 5) + \frac{1}{8} \cdot (1, 2, 5)$$

Và ta có đánh giá

$$\frac{3x^5 y^2 z + 3x^2 y^5 z + x^2 y z^5 + xy^2 z^5}{8} \geq x^3 y^3 z^2$$

Cộng bất đẳng thức trên và các bất đẳng thức tương tự, ta thu được bất đẳng thức

$$\sum_{sym} x^5 y^2 z \geq \sum_{sym} x^3 y^3 z^2$$

### Ví dụ 8.

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  ta có

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

### Lời giải.

Quy đồng mẫu số và nhân hai vế cho 2, ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{sym} (a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)abc \leq \\ & \leq 2(a^3 + b^3 + abc)(b^3 + c^3 + abc)(c^3 + a^3 + abc) \\ \Leftrightarrow & \sum_{sym} (a^7 bc + 3a^4 b^4 c + 4a^5 b^2 c^2 + a^3 b^3 c^3) \leq \\ & \leq \sum_{sym} (a^3 b^3 c^3 + 2a^6 b^3 + 3a^4 b^4 c + 2^5 b^2 c^2 + a^7 bc) \\ \Leftrightarrow & \sum_{sym} (2a^6 b^3 - 2a^5 b^2 c^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng theo định lý nhóm.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã gặp may vì sau khi thực hiện các phép biến đổi đại số, ta thu được một bất đẳng thức tương đối đơn giản, có thể áp dụng trực tiếp định lý nhóm. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào định lý này cũng đủ để giải quyết vấn đề. Trong trường hợp 3 biến số, ta có một kết quả rất đẹp khác là định lý Schur.

**Định lý. (Schur)**

Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm. Khi đó với mọi  $r > 0$

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$  hay khi hai trong ba số  $x, y, z$  bằng nhau còn số thứ ba bằng 0.

**Chứng minh.**

Vì bất đẳng thức hoàn toàn đối xứng đối với ba biến số, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $x \geq y \geq z$ . Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$(x-y)(x^r(x-z) - y^r(y-z)) + z^r(x-z)(y-z) \geq 0$$

và mỗi một thừa số ở vế trái đều hiển nhiên không âm.

Trường hợp hay được sử dụng nhất của bất đẳng thức Schur là khi  $r = 1$ . Bất đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{sym} (x^2 - 2x^2y + xyz) \geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ 1.

**Ví dụ 9.**

Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

**Lời giải.**

Quy đồng mẫu số, khai triển và rút gọn, ta được

$$\sum_{sym} (4a^5b - a^4b^2 - 3a^3b^3 + a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2) \geq 0 \tag{9.1}$$

Dùng bất đẳng thức Schur

$$x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$$



Nhân hai vế với  $2xyz$  rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{sym} (a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2) \geq 0 \quad (9.2)$$

Ngoài ra, áp dụng định lý nhóm (hay nói cách khác – bất đẳng thức AM-GM có trọng số) ta có

$$\sum_{sym} (4a^5b - a^4b^2 - 3a^3b^3) \geq 0 \quad (9.3)$$

Từ (9.2), (9.3) suy ra (9.1) và đó chính là điều phải chứng minh.

Nói đến bất đẳng thức thuần nhất đối xứng, không thể không nói đến các hàm số đối xứng cơ bản. Đó là các biểu thức  $S_1 = \sum_{i=1}^n x_i, S_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \dots, S_n = x_1 x_2 \dots x_n$ .

Với các bất đẳng thức liên quan đến các hàm đối xứng này, có một thủ thuật rất hữu hiệu được gọi là “thủ thuật giảm biến số bằng định lý Rolle”. Chúng ta trình bày ý tưởng của thủ thuật này thông qua ví dụ sau

### Ví dụ 10.

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left( \frac{ab + ac + ad + bc + bd + cd}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \geq \left( \frac{abc + abd + acd + bcd}{4} \right)^{\frac{1}{3}}$$

### Lời giải.

Đặt  $S_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd, S_3 = abc + abd + acd + bcd$ . Xét đa thức

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + S_2x^2 - S_3x + abcd$$

$P(x)$  có 4 nghiệm thực  $a, b, c, d$  (nếu có các nghiệm trùng nhau thì đó là nghiệm bội). Theo định lý Rolle,  $P'(x)$  cũng có 3 nghiệm (đều dương)  $u, v, w$ . Do  $P'(x)$  có hệ số cao nhất bằng 4 nên

$$P'(x) = 4(x-u)(x-v)(x-w) = 4x^3 - 4(u+v+w)x^2 + 4(uv+vw+wu)x - 4uvw$$

Mặt khác

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + S_2x - S_3$$

suy ra  $S_2 = 2(uv + vw + wu)$ ,  $S_3 = 4uvw$  và bất đẳng thức cần chứng minh ở đầu bài có thể viết lại theo ngôn ngữ  $u, v, w$  là

$$\left( \frac{uv + vw + wu}{3} \right)^{\frac{1}{2}} \geq (uvw)^{\frac{1}{3}}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

### 5. Thuần nhất hóa bất đẳng thức không thuần nhất.

Trong các phần trên, chúng ta đã trình bày các phương pháp cơ bản để chứng minh một bất đẳng thức thuần nhất. Đó không phải là tất cả các phương pháp (và dĩ nhiên không bao giờ có thể tìm được tất cả!), tuy vậy có thể giúp chúng ta định hướng tốt khi gặp các bất đẳng thức thuần nhất. Nhưng nếu gặp bất đẳng thức không thuần nhất thì sao nhỉ? Có thể bằng cách nào đó để đưa các bất đẳng thức không thuần nhất về các bất đẳng thức thuần nhất và áp dụng các phương pháp nói trên được không? Câu trả lời là có. Trong hầu hết các trường hợp, các bất đẳng thức không thuần nhất có thể đưa về bất đẳng thức thuần nhất bằng một quá trình mà ta gọi là thuần nhất hóa. Chúng ta không thể “chứng minh” một “định lý” được phát biểu kiểu như thế, nhưng có hai lý do để tin vào nó: thứ nhất, thực ra chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh được, còn các đại lượng khác bậc chỉ so sánh được trong các ràng buộc nào đó. Thứ hai, nhiều bất đẳng thức không thuần nhất đã được “tạo ra” bằng cách chuẩn hóa hoặc thay các biến số bằng các hằng số. Chỉ cần chúng ta đi ngược lại quá trình trên là sẽ tìm được nguyên dạng ban đầu.

Một ví dụ rất đơn giản cho lý luận nêu trên là từ bất đẳng thức thuần nhất  $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$ , bằng cách cho  $z = 1$ , ta được bất đẳng thức không thuần nhất

$$x^3 + y^3 + 1 \geq x^2y + y^2 + x$$

#### Ví dụ 11. (England 1999)

Cho  $p, q, r$  là các số thực dương thỏa điều kiện  $p + q + r = 1$ . Chứng minh

$$7(p + q + r) \leq 2 + 9pqr$$

**Ví dụ 12. (IMO 2000)**

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $abc = 1$ . Chứng minh

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

**Hướng dẫn.**

Đặt  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}, c = \frac{z}{x}$  !

**Ví dụ 13. (IMO, 1983)**

Chứng minh rằng nếu  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác thì

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

**Hướng dẫn.**

Đặt  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$  !

# Bài tập

## Bài 1.

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} + \frac{x^3}{z^3} + \frac{z^3}{y^3} + \frac{y^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{z^2}{xy} + \frac{yz}{x^2} + \frac{zx}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$$

## Bài 2.

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương  $x, y, z$

$$\frac{9}{4(x+y+z)} \geq \frac{x}{(x+y)(x+z)} + \frac{y}{(y+z)(y+x)} + \frac{z}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{2}{x+y+z}$$

## Bài 3.

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thoả mãn điều kiện  $2x+4y+7z=2xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z$$

## Bài 4.

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thoả  $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c \leq 3$$

## Bài 5. (IMO 1984)

Cho  $x, y, z$  là các số thực không âm thoả mãn điều kiện  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$$

## Bài 6. (Iran, 1996)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

**Bài 7.** (VMO 1996)

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16$$

Chứng minh rằng

$$3(a + b + c + d) \geq 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

**Bài 8.** (Poland 1996)

Cho  $a, b, c$  là các số thực thoả mãn điều kiện  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2 + 1} + \frac{b}{b^2 + 1} + \frac{c}{c^2 + 1} \leq \frac{9}{10}$$

**Bài 9.** (Poland 1991)

Cho  $x, y, z$  là các số thực thoả mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Chứng minh rằng

$$x + y + z \leq 2 + xyz$$

**Bài 10.** (IMO 2001)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

# PHƯƠNG PHÁP DÒN BIẾN

## I. Mở đầu.

Đặc điểm chung của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau. Có một phương pháp đánh giá trung gian cho phép ta giảm biến số của bất đẳng thức cần chứng minh. Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến.

Để chứng minh bất đẳng thức dạng  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , ta chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(t, t, \dots, x_n)$$

Trong đó  $t$  là lượng trung bình của  $x_1, x_2, \dots$  chẳng hạn như trung bình nhân hoặc trung bình cộng. Nếu được như vậy thì tiếp tục sang bước thứ hai của phép chứng minh là chỉ ra rằng

$$f(t, t, \dots, x_n) \geq 0$$

Tất nhiên, bất đẳng thức này đã giảm số biến số đi một và thường là dễ chứng minh hơn bất đẳng thức ban đầu. Việc lựa chọn lượng trung bình nào để dồn biến tùy thuộc vào đặc thù của bài toán, và đôi khi lượng  $t$  khá đặc biệt.

Thường thì, bước thứ nhất trong 2 bước chính ở trên là khó hơn cả vì thực chất ta vẫn phải làm việc với các ước lượng có ít nhất là ba biến số. Sau đây là một vài dạng dồn biến thường gặp.

## II. Phương pháp dồn biến trong đại số.

### 1. Dồn biến ba biến số.

Đây là phần đơn giản nhất của phương pháp dồn biến. Và ngược lại cũng có thể nói phương pháp dồn biến hiệu quả nhất trong trường hợp này.

### Ví dụ 1.1.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

#### Lời giải.

Đặt  $f(a, b, c) = a + b + c - a^2b^2 - b^2c^2 - c^2a^2$

Giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$  thì dễ thấy  $a \leq 1, b^2 + c^2 \geq 2 \Rightarrow b + c \geq \sqrt{2}$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f\left(a, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right) &= (b - c)^2 \left( \frac{(b + c)^2}{4} - \frac{1}{b + c + \sqrt{2(b^2 + c^2)}} \right) \\ &\geq (b - c)^2 \left( \frac{2}{4} - \frac{1}{\sqrt{2} + 2} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f\left(a, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}, \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2}}\right) \\ &= a + \sqrt{2(b^2 + c^2)} - a^2(b^2 + c^2) - \frac{(b^2 + c^2)^2}{4} \\ &= a + \sqrt{2(3 - a^2)} - a^2(3 - a^2) - \frac{(3 - a^2)^2}{4} \\ &= (a - 1)^2 \left( \frac{3(a + 1)^2}{4} - \frac{3}{\sqrt{2(3 - a^2)} + 3 - a} \right) \\ &\geq (a - 1)^2 \left( \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) = 0 \\ &\Rightarrow f(a, b, c) \geq 0 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Ví dụ 1.2.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$f(a, b, c) = (a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \leq 27$$

#### Lời giải.

Giả sử  $a \leq b, c \Rightarrow a \leq 1, b + c \geq 2$ . Xét hiệu



$$\begin{aligned}
& f(a,b,c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \\
& = \frac{(a^2 + a + 1)(b-c)^2(4 - (b+c)^2 - (b+c) - 4bc)}{16} \leq 0 \\
& \Rightarrow f(a,b,c) \leq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\
& = (a^2 + a + 1) \left( \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + \frac{b+c}{2} + 1 \right) \\
& = \frac{(a-1)^2(a(a-1)(a^2 - 12a + 48) - 37a - 71)}{16} + 27 \\
& \leq 27 \\
& \Rightarrow f(a,b,c) \leq 27
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Ví dụ 1.3.

Cho  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Chứng minh rằng

$$f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$$

### Lời giải.

Xét hiệu

$$\begin{aligned}
& f(a,b,c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \frac{3}{4} \cdot (b-c)^2 \geq 0 \\
& \Rightarrow f(a,b,c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = a^2 - a(b+c) + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{b+c}{2}\right)^2 \geq 0 \\
& \Rightarrow f(a,b,c) \geq 0
\end{aligned}$$

### Nhận xét.

Chắc ai cũng cảm thấy đây là một bất đẳng thức quá dễ, quá cơ bản và tôi nghĩ chắc cũng có người không hiểu nổi tại sao tôi lại đưa ví dụ này vào. Nhưng hãy chú ý rằng những cái hay trong những bài toán đơn giản không phải là không có và bây giờ tôi sẽ trình bày ý tưởng mà tôi cảm thấy thích thú nhất trong bài này mà mình phát hiện được (có thể không chỉ mình tôi).

Vì  $f(a,b,c)$  là hàm đối xứng với các biến  $a, b, c$  nên theo trên, ta có

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \\
&= f\left(\frac{b+c}{2}, a, \frac{b+c}{2}\right) \\
&\geq f\left(\frac{b+c}{2}, \frac{2a+b+c}{4}, \frac{2a+b+c}{4}\right) \\
&= \dots \geq \dots
\end{aligned}$$

Và ý tưởng dãy số bắt đầu xuất hiện.

Xét các dãy số  $(a_n), (b_n), (c_n)$  được xác định bởi

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$$

$$a_{2n+1} = a_{2n}, b_{2n+1} = c_{2n+1} = \frac{b_{2n} + c_{2n}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$a_{2n+2} = b_{2n+1}, b_{2n+2} = c_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + c_{2n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Dễ thấy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3} = t$$

Và

$$f(a,b,c) \geq f(a_n, b_n, c_n), \forall n \in \mathbf{N}$$

Do hàm  $f(a,b,c)$  liên tục nên

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n\right) = f(t, t, t) = 0 \\
&\Rightarrow f(a,b,c) \geq 0
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Cách là trên là một ý tưởng có thể nói là khá độc đáo và là cơ sở hình thành nên cách thức dồn biến bốn biến số mà chúng ta sẽ xét ngay bây giờ.

## 2. Dồn biến bốn biến số.

Khác với ba biến số dồn biến bốn biến số khó khăn và phức tạp hơn nhiều. Trong trường hợp này kiểu dồn biến thông thường mà chúng ta vẫn làm với ba biến vô tác dụng. Và ví dụ 1.3 chính là tiền đề để xây dựng nên đường lối tổng quát để giải quyết các bài bất đẳng thức có thể giải bằng dồn biến kết hợp dãy số.

### Ví dụ 2.1. (Dự tuyển IMO 1993)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng

$$abc + abd + acd + bcd \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} \cdot abcd$$

**Lời giải.**

Đặt

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= abc + abd + acd + bcd - \frac{176}{27} \cdot abcd \\ &= bc(a + d) + ad \left( b + c - \frac{176}{27} \cdot bc \right) \\ &= ad(b + c) + bc \left( a + d - \frac{176}{27} \cdot ad \right) \end{aligned}$$

Với mọi bộ bốn số  $(a, b, c, d)$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ , nếu tồn tại hai số trong bốn số này, chẳng hạn  $b, c$  thỏa mãn  $b + c - \frac{176}{27} \cdot bc \leq 0$  thì

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= bc(a + d) + ad \left( b + c - \frac{176}{27} \cdot bc \right) \\ &\leq bc(a + d) \\ &\leq \left( \frac{b + c + a + d}{3} \right)^3 \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Do đó, không mất tính tổng quát có thể giả sử với mọi bộ bốn số  $(a, b, c, d)$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$  thì hai số bất kỳ trong bộ bốn số này, chẳng hạn  $a, d$ , đều thỏa mãn  $a + d - \frac{176}{27} \cdot ad \geq 0$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &= ad(b + c) + bc \left( a + d - \frac{176}{27} \cdot ad \right) \\ &\leq ad(b + c) + \left( \frac{b + c}{2} \right)^2 \left( a + d - \frac{176}{27} \cdot ad \right) \end{aligned}$$

$$= f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}, d\right)$$

Xét các dãy  $(b_n), (c_n), (d_n)$  được xác định bởi

$$b_0 = b, c_0 = c, d_0 = d$$

$$b_{2n+1} = d_{2n}, c_{2n+1} = d_{2n+1} = \frac{b_{2n} + c_{2n}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$b_{2n+2} = c_{2n+1}, c_{2n+2} = d_{2n+2} = \frac{b_{2n+1} + c_{2n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Khi đó, dễ thấy 
$$\begin{cases} a + b_n + c_n + d_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \frac{1-a}{3} \end{cases}$$

Từ cách đặt, ta có  $f(a, b, c, d) \leq f(a, b_n, c_n, d_n), \forall n \in \mathbf{N}$

Do  $f$  liên tục nên

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\leq f\left(a, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n\right) \\ &= f\left(a, \frac{1-a}{3}, \frac{1-a}{3}, \frac{1-a}{3}\right) \\ &= 3a\left(\frac{1-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{3}\right)^3 - \frac{176}{27} \cdot a\left(\frac{1-a}{3}\right)^3 \\ &= \frac{a(4a-1)^2(11a-14)}{729} + \frac{1}{27} \\ &\leq \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ .

Ngoài cách trên ta có thể làm đơn giản như sau

Ta có thể giả sử  $f(a, b, c, d) \leq f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right)$  với mọi  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn

điều kiện  $a+b+c+d=1$  (vì trong trường hợp ngược lại bài toán được giải quyết).

Vì tính đối xứng của hàm  $f(a, b, c, d)$  ta có

$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) &\leq f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right) \leq f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{a+d}{2}\right) \\
&\leq f\left(\frac{a+d}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\
&\leq f\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{27}
\end{aligned}$$

Cách làm trên khá hay nhưng chỉ có thể áp dụng được với một số ít bài toán dạng này.

### Ví dụ 2.2.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng

$$f(a,b,c,d) = a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + \frac{148}{27}abcd \geq \frac{1}{27}$$

### Lời giải.

Xét hiệu

$$D = f(a,b,c,d) - f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right) = (a-b)^2 \left(\frac{7}{8} \cdot (a-b)^2 + 3ab - \frac{37}{27} \cdot cd\right)$$

Từ đó, nếu có  $ab \geq cd \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow f(a,b,c,d) \geq f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c, d\right)$

Giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$ .

Xét các dãy số  $(a_n), (b_n), (c_n)$  được xác định bởi

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$$

$$a_{2n} = b_{2n-1}, b_{2n} = c_{2n} = \frac{a_{2n-1} + c_{2n-1}}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$a_{2n+1} = b_{2n+1} = \frac{a_{2n} + b_{2n}}{2}, c_{2n+1} = c_{2n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\text{Dễ thấy } \begin{cases} a_n + b_n + c_n + d = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ a_n b_n \geq c_n d \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3} = \frac{1-d}{3} \end{cases}$$

Và

$$f(a, b, c, d) \geq f(a_n, b_n, c_n, d) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Do  $f$  liên tục nên

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\leq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n, d\right) \\ &= f\left(d, \frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3}, \frac{1-d}{3}\right) \\ &= 3\left(\frac{1-d}{3}\right)^4 + d^4 + \frac{148}{27}d\left(\frac{1-d}{3}\right)^3 \\ &= \frac{d(4d-1)^2(19d+20)}{729} + \frac{1}{27} \\ &\geq \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ .

### Ví dụ 2.3.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$16 + 2abcd \geq 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd)$$

### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} 16 + 2abcd &\geq 3(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd &\geq 16 \end{aligned}$$

Đặt  $f(a, b, c, d) = 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4abcd$

Xét hiệu

$$D = f(a, b, c, d) - f\left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right) = (c-d)^2 \left(\frac{3}{2} - ab\right)$$

Từ đó nhận thấy nếu  $3 \geq 2ab \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c, d) \geq f\left(a, b, \frac{c+d}{2}, \frac{c+d}{2}\right)$

Đến đây có thể sử dụng dãy số như bài trước hoặc có thể làm như sau

Giả sử  $a \leq b \leq c \leq d \Rightarrow ab \leq 1$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(a,b,c,d) &\geq f\left(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}\right) \\
&= 3(a^2+b^2) + \frac{3}{2}(c+d)^2 + ab(c+d)^2 \\
&= ((4-a-b)^2 - 6)ab + 3(a+b)^2 + \frac{3}{2}(4-a-b)^2 \\
&= (x^2 - 8x + 10)y + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 24 \\
&= g(x,y)
\end{aligned}$$

Trong đó  $x = a + b, y = ab$ .

Ta có  $2\sqrt{y} \leq x \leq 2$ . Xét các trường hợp

$$+ \text{ Nếu } x^2 - 8x + 10 \geq 0 \Rightarrow g(x,y) \geq \frac{9}{2}x^2 - 12x + 24 = \frac{9}{2}\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + 16 \geq 16$$

+ Nếu  $x^2 - 8x + 10 < 0$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(x,y) &\geq (x^2 - 8x + 10) \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 24 = \frac{(x-2)^2(x^2 - 4x + 8)}{4} + 16 \geq 16 \\
&\Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a,b,c,d) = (1,1,1,1), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0\right)$ .

#### Ví dụ 2.4. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$$

**Lời giải.**

Ta có Bổ đề sau

#### Bổ đề. (China TST 2004)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $abcd = 1$ . Khi đó, ta có

$$f(a,b,c,d) = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

*Chứng minh.*

Để thấy, nếu  $x, y > 0$  thỏa mãn  $xy \geq 1$  thì



$$\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} \geq \frac{2}{(1+\sqrt{xy})^2}$$

Từ đó ta có nếu  $ab \geq 1$  thì  $f(a, b, c, d) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c, d)$

Giả sử  $a \geq b \geq c \geq d$  và xét các dãy số  $(a_n), (b_n), (c_n)$  được xác định bởi

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$$

$$a_{2n+1} = b_{2n+1} = \sqrt{a_{2n} b_{2n}}, c_{2n+1} = c_{2n}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$a_{2n+2} = b_{2n+2} = \sqrt{a_{2n+1} c_{2n+1}}, c_{2n+2} = b_{2n+1}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\text{Dễ thấy } \begin{cases} a_n b_n c_n d = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ a_n b_n \geq 1 \quad \forall n \in \mathbf{N} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \sqrt[3]{abc} = \frac{1}{\sqrt[3]{d}} \end{cases}$$

Từ đó

$$f(a, b, c, d) \geq f(a_n, b_n, c_n, d), \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow f(a, b, c, d) \geq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n, d\right)$$

$$= f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{d}}, \frac{1}{\sqrt[3]{d}}, \frac{1}{\sqrt[3]{d}}, d\right)$$

$$= \frac{3\sqrt[3]{d^2}}{(\sqrt[3]{d} + 1)^2} + \frac{1}{(1+d)^2}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{d^2} (\sqrt[3]{d} - 1)^2 (2\sqrt[3]{d^4} + 2d + \sqrt[3]{d^2} + 4\sqrt[3]{d} + 3)}{(\sqrt[3]{d} + 1)^2 (1+d)^2} + 1$$

$$\geq 1$$

$$\Rightarrow f(a, b, c, d) \geq 1$$

Vậy Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta có  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow a, b, c, d \in [0, 1]$

Nếu  $abcd = 0$  thì  $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$ .

Nếu  $abcd > 0$ .

Đặt  $x = \frac{1-a}{a}, y = \frac{1-b}{b}, z = \frac{1-c}{c}, t = \frac{1-d}{d} \Rightarrow x, y, z, t > 0$

Giả thiết  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} = 1$

Và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$xyzt \geq 1$$

Giả sử ngược lại  $xyzt < 1$ . Khi đó, đặt  $t' = \frac{1}{xyz}$  thì  $xyzt' = 1$  và  $t < t'$ .

Áp dụng Bô đê, ta được

$$\begin{aligned} 1 &\leq \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t')^2} \\ &< \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+y)^2} + \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} = 1 \end{aligned}$$

Vậy điều giả sử sai.

$$\Rightarrow xyzt \geq 1$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ .

### Nhận xét.

Đây là một bài toán hay và lời giải vừa rồi đã sử dụng hai công cụ là đổi biến và dồn biến (với các biến mới). Ngoài ra có thể dồn biến trực tiếp với các biến ban đầu (dành cho mọi người).

### 3. Dồn biến với nhiều biến số hơn.

#### Ví dụ 3.1.

Cho  $a, b, c, d, e \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d + e = 5$ . Chứng minh rằng

$$f(a, b, c, d, e) = 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) + 5abcde \geq 25$$

#### Lời giải.

Xét hiệu

$$D = f(a, b, c, d, e) - f\left(a, b, c, \frac{d+e}{2}, \frac{d+e}{2}\right) = (d-e)^2 \left(2 - \frac{5}{4}abc\right)$$

Từ đó, ta có nếu  $abc \leq \frac{8}{5} \Rightarrow D \geq 0 \Rightarrow f(a, b, c, d, e) \geq f\left(a, b, c, \frac{d+e}{2}, \frac{d+e}{2}\right)$ .

Giả sử  $a \leq b \leq c \leq d \leq e$  và xét các dãy số  $(c_n), (d_n), (e_n)$  được xác định bởi

$$c_0 = c, d_0 = d, e_0 = e$$

$$c_{2n-1} = c_{2n-2}, d_{2n-1} = e_{2n-1} = \frac{d_{2n-2} + e_{2n-2}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$c_{2n} = d_{2n-1}, d_{2n} = e_{2n} = \frac{c_{2n-1} + e_{2n-1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Để thấy

$$a + b + c_n + d_n + e_n = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$a \leq b \leq \min\{c_n, d_n, e_n\} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow abc_n \leq \frac{8}{5} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Và

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = \frac{c + d + e}{3} = \frac{5 - a - b}{3}$$

Từ đó, ta có

$$f(a, b, c, d, e) \geq f(a, b, c_n, d_n, e_n) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d, e) &\geq f\left(a, b, \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} e_n\right) \\ &= f\left(a, b, \frac{5-a-b}{3}, \frac{5-a-b}{3}, \frac{5-a-b}{3}\right) \\ &= 4(a^2 + b^2) + \frac{4}{3}(5-a-b)^2 + \frac{5ab(5-a-b)^3}{27} \\ &= 4(a+b)^2 - 8ab + \frac{4}{3}(5-a-b)^2 + \frac{5ab(5-a-b)^3}{27} \\ &= \frac{5y^2(5-x)^3}{27} - 8y + \frac{16x^2 - 40x + 100}{3} \\ &= g(y) \end{aligned}$$

Trong đó  $x = a + b, y = ab$ .

Ta có

$$g'(y) = \frac{10y(5-x)^3}{27} - 8$$

+ Nếu  $\frac{10y(5-x)^3}{27} - 8 \geq 0$  thì

$$g(y) \geq g(0) = \frac{16x^2 - 40x + 100}{3} = \frac{16}{3} \cdot \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + 25 \geq 25$$

+ Nếu  $\frac{10y(5-x)^3}{27} - 8 < 0$  thì

$$\begin{aligned} g(y) &\geq g\left(\frac{x^2}{4}\right) \\ &= \left( \frac{5\left(\frac{x^2}{4}\right)(5-x)^3}{27} - 8 \right) \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{16x^2 - 40x + 100}{3} \\ &= \frac{(x-2)^2(-5x^3 + 55x^2 - 135x + 225)}{108} + 25 \end{aligned}$$

Dễ dàng chứng minh

$$-5x^3 + 55x^2 - 135x + 225 \geq 0 \quad \forall x \in [0, 2]$$

Do đó

$$g(y) \geq 25$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d, e) = (1, 1, 1, 1, 1), \left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 0\right)$ .

### Ví dụ 3.2.

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i + x_j)$$

*Lời giải.*

$$\text{Ta có } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^2 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \left( \sum_{j \neq i} x_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot (1 - x_i)$$

Xét hiệu

$$f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = 2x_i x_j (2 - 3(x_i + x_j))$$

Do đó, nếu  $3(x_i + x_j) \leq 2$ , thì  $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, 0, x_n)$ .

Xét tất cả các bộ số  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sao cho  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đạt  $\max f$ .

Trong đó, chọn ra bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  sao cho số phần tử dương trong bộ số đó là ít nhất (luôn có thể chọn được vì số số dương là hữu hạn).

Giả sử  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k > 0 = a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = a_n$ .

Nếu  $k \geq 3$  thì ta có

$$1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{a_2 + a_3}{2} + a_2 + a_3 = \frac{3}{2} \cdot (a_2 + a_3) \Rightarrow 3(a_2 + a_3) \leq 2$$

Do đó

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) \Rightarrow f(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n) = \max f$$

Điều này vô lý do bộ số  $(a_1, a_2 + a_3, 0, \dots, a_n)$  có số số dương ít hơn bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Vậy  $k \leq 2$ . Do đó

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 a_2 (a_1 + a_2) = a_1 (1 - a_1) \leq \frac{1}{4}$$

Do đó

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi  $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = x_4 = \dots = x_n$ .

#### 4. Các kiểu dồn biến khác.

Trong một số trường hợp, các kiểu dồn biến thông thường (đã nói ở phần mở đầu) vô tác dụng (thường do dấu bằng không phải xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau).

Vì vậy, xuất hiện một số kiểu dồn biến khác.

##### Ví dụ 4.1.

Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx = 1$ . Tìm min của

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}$$

**Lời giải.**

Khác với những ví dụ trước, ở ví dụ này có hai điều khiến việc dồn biến khó khăn hơn là cực trị đạt được không phải khi cả ba biến bằng nhau và biểu thức điều kiện của biến hết sức khó chịu. Sau đây là một trong những lời giải cho bài này.

Giả sử  $x \geq y, z$  và đặt  $a = y + z$  thì  $ax \leq 1$  và  $2x \geq a$ . Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(x, y, z) - f\left(0, a, \frac{1}{a}\right) &= \frac{(1-ax)(2x-a+a^2x)}{(1+x^2)(1+a^2)} \geq 0 \\ \Rightarrow f(x, y, z) &\geq f\left(0, a, \frac{1}{a}\right) = \frac{(a-1)^2(2a^2-a+2)}{2a(1+a^2)} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(x, y, z) = (1, 1, 0)$ .

Vậy

$$\min f(x, y, z) = \frac{5}{2}$$

#### Ví dụ 4.2.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a, b, c) = (a^3 + a + 7)(b^3 + b + 7)(c^3 + c + 7)$$

#### Lời giải.

Bằng tính toán trực tiếp (hoặc giả sử có  $b = c$ ), ta dự đoán được  $\max f = 441$  đạt được chẳng hạn khi  $a = 1, b = c = 0$ . Từ đó, dẫn đến lời giải như sau

Giả sử  $a \leq b, c \Rightarrow b + c \geq \frac{2}{3}$ .

Mặt khác, do  $0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow b^2 + c^2 \leq b + c \leq 1, bc \leq 1$ .

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a, b, c) - f(a, b+c, 0) &= (a^3 + a + 7)bc(b^2c^2 + 7(b^2 + c^2) + 1 - 21(b+c)) \\ &\leq (a^3 + a + 7)bc\left(1 + 7 + 1 - 21 \cdot \frac{2}{3}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(a, b, c) &\leq f(a, b+c, 0) \\ &= 7(a^3 + a + 7)((1-a)^3 + 1 - a + 7) \\ &= 7a(a-1)((1-a)(2-a^2+a^3) + 19) + 441 \leq 441 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ .

Vậy  $\max f = 441$ .

### III. Dồn biến trong tam giác.

#### 1. Dồn biến lượng giác trong tam giác.

Trong tam giác phương pháp dồn biến đưa bất đẳng thức đã cho ở trường hợp tam giác thường về trường hợp tam giác cân.

#### Ví dụ 5.1.

Cho tam giác  $ABC$  không tù. Chứng minh rằng

$$f(A, B, C) = \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C \cdot \sin A}{\sin B} + \frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin C} \geq \frac{5}{2}$$

*Lời giải.*

Giả sử  $A \geq B, C \Rightarrow \frac{\pi}{2} \geq A \geq \frac{\pi}{3}$ .

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) &= \frac{\sin^2 \frac{B-C}{2}}{\sin A} \cdot \left( \frac{4 \sin^2 A \cdot \sin^2 \frac{A}{2}}{\sin B \cdot \sin C} - 1 \right) \\ &\geq \frac{\sin^2 \frac{B-C}{2}}{\sin A} \cdot \left( 4 \sin^2 \frac{A}{2} - 1 \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(A, B, C) \geq f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) = 2 \sin A + \frac{\sin^2 \frac{B+C}{2}}{\sin A} = 2 \sin A + \frac{1}{2} \cotg \frac{A}{2}$$

Đặt  $t = \cotg \frac{A}{2} \Rightarrow t \geq 1$ .

Và

$$2 \sin A + \frac{1}{2} \cotg \frac{A}{2} = \frac{4t}{t^2+1} + \frac{1}{2} t = \frac{(t-1)(t^2-4t+5)}{2(t^2+1)} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f(A, B, C) \geq \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $A = \frac{\pi}{2}, B = C = \frac{\pi}{4}$  và các hoán vị tương ứng.

### Nhận xét.

Đây là dạng lượng giác của ví dụ 4.1. Dễ thấy rằng dồn biến ở bài này dễ chịu và dễ nghĩ hơn bài kia rất nhiều.

### Ví dụ 5.2. (VMO 1993)

Cho tam giác  $ABC$ . Tìm min của

$$f(A, B, C) = (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B)(1 + \cos^2 C)$$

### Lời giải.

#### + Cách 1.

Giả sử  $A \leq B, C \Rightarrow A \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos A \geq \frac{1}{2}$

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(A, B, C) - f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) &= \\ &= (1 + \cos^2 A) \cdot \sin^2 \frac{B-C}{2} \cdot \frac{6\cos A - \cos(B-C) - 1}{2} \\ &\geq (1 + \cos^2 A) \cdot \sin^2 \frac{B-C}{2} \cdot \frac{3-1-1}{2} \\ &\geq 0 \\ \Rightarrow f(A, B, C) &\geq f\left(A, \frac{B+C}{2}, \frac{B+C}{2}\right) \\ &= (1 + \cos^2 A) \left(1 + \cos^2 \frac{B+C}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(1 + \cos^2 A)(3 - \cos A)^2}{4} \\ &= \frac{(2\cos A - 1)^2(4(1 - \cos A)(4 - \cos A) + 3)}{64} + \frac{125}{64} \\ &\geq \frac{125}{64} \end{aligned}$$



Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $\min f(A, B, C) = \frac{125}{64}$ .

**+ Cách 2.**

Giả sử  $A \geq B \geq C \Rightarrow C \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos \frac{C}{2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có

$$\begin{aligned} (1 + \cos^2 A)(1 + \cos^2 B) &= (\cos A + \cos B)^2 + (1 - \cos A \cos B)^2 \\ &= 4 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos^2 \frac{A-B}{2} + \left( \cos^2 \frac{A-B}{2} - 1 - \cos^2 \frac{C}{2} \right)^2 \\ &= f\left( \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'\left( \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) &= 4 \sin^2 \frac{C}{2} + 2 \left( \cos^2 \frac{A-B}{2} - 1 - \cos^2 \frac{C}{2} \right) \\ &= 2 \left( \cos^2 \frac{A-B}{2} + 1 - 3 \cos^2 \frac{C}{2} \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f\left( \cos^2 \frac{A-B}{2} \right) &\geq f(1) = \left( 1 + \sin^2 \frac{C}{2} \right)^2 \\ \Rightarrow f(A, B, C) &\geq f\left( \frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C \right) \end{aligned}$$

Đến đây, lập luận hoàn toàn tương tự như cách 1, ta có  $\min f(A, B, C) = \frac{125}{64}$ .

**Ví dụ 5.3.**

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\sin A + \sin B + \sin C)$$

**Lời giải.**

Giả sử  $A \leq B, C \Rightarrow A \leq \frac{\pi}{3}$ . Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\cos \frac{B-C}{2} + 2 \cos \frac{B-C}{4} \cdot \cos \frac{\pi-3A}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin A - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{A}{2}\right) \cdot \left(2 \cos^2 \frac{B-C}{4} - 1\right) + 2 \cos \frac{B-C}{4} \cdot \cos \frac{\pi-3A}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin A \geq 0$$

Xét hàm số  $f(x) = \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{A}{2}\right) \cdot (2x^2 - 1) + 2x \cdot \cos \frac{\pi-3A}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \sin A$

$$\text{Với } x = \cos \frac{B-C}{4} \Rightarrow x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$$

Ta có

$$f'(x) = 4x \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{A}{2}\right) + 2 \cos \frac{\pi-3A}{4}$$

$$\leq 4x \left(1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos \frac{\pi-3A}{4}$$

$$= -4x + 2 \cos \frac{\pi-3A}{4}$$

$$< -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cos \frac{\pi-3A}{4}$$

$$< 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq f(1) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \cos \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{\pi-3A}{4} - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin A = g(A)$$

Ta có

$$g'(A) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \cos A + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sin \frac{A}{2} + \frac{3}{2} \cdot \sin \frac{\pi-3A}{4}$$

$$= \left(\sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4}\right) \left(2 \sin \frac{A}{2} - 1\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \left(\sin \frac{A}{4} + \cos \frac{A}{4}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\leq 0 \text{ (do } 0 < A \leq \frac{\pi}{3}\text{)}$$

$$\Rightarrow g(A) \geq g\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Rightarrow f(1) \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

**Nhận xét.** Việc sử dụng công cụ đạo hàm trong phương pháp dồn biến rất có lợi khi việc biến đổi tương đương phức tạp.

## 2. Dồn biến theo các cạnh.

### Ví dụ.

Cho tam giác  $ABC$  thỏa mãn  $a \geq b, c$ . Chứng minh rằng

$$l_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a + b + c)$$

### Lời giải.

Ta coi

$$\begin{aligned} l_a + m_b + m_c &= \frac{\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} + \sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2} \right) \\ &= f(a, b, c) \end{aligned}$$

Trước hết, ta chứng minh

$$\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} + \sqrt{2a^2 - b^2 + 2c^2} \leq 2\sqrt{2a^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \quad (1)$$

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow (b-c)^2(a+b+c)(b+c-a) \geq 0 \text{ (hiển nhiên ñúng)}$$

Mặt khác, ta lại coi

$$\frac{\sqrt{bc}}{b+c} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta coi

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{2a^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \\ &= f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

Ta sẽ chứng minh

$$f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a+b+c) \quad (4)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \sqrt{2a^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a+b+c) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2 - 1} + \sqrt{8 + \left(\frac{b+c}{a}\right)^2} \leq \sqrt{3} \left(1 + \frac{b+c}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{8 + x^2} \leq \sqrt{3}(1+x) \quad (\text{trong đó } x = \frac{b+c}{a} \Rightarrow x \in (1, 2]) \\ &\Leftrightarrow (x-2)^3(x+2) \leq 0 \quad (\text{hiển nhiên đúng}) \end{aligned}$$

Kết hợp (3) và (4), ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Tuy đã rất cố gắng nhưng bài viết này cũng không thể vét hết các kiểu và dạng bài tập dồn biến cũng như nói về tư duy và cách thức hình thành phương pháp. Nhưng tôi nghĩ nó cũng đã đủ để các bạn hình thành nên phương pháp này trong đầu, từ đó các bạn sẽ tự cảm nhận được cái hay của phương pháp này cũng như các kiểu dồn biến khác mà bài viết này chưa đề cập đến. Chú ý rằng các lời giải trên là để phù hợp với bài viết này nên cũng có thể có những cách khác hay hơn.

## VI. Bài tập.

### Bài 1. (Vietnam TST 1996)

Cho  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4)$$

### Bài 2. (China TST 2004)

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa mãn  $abcd = 1$ . Chứng minh rằng

$$P = \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

### Bài 3.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4} \cdot abc \geq \frac{1}{4}$$

### Bài 4.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$abc + abd + acd + bcd + a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2 \leq 8$$

### Bài 5. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b)(b^2 + c)(c^2 + a) \leq 13 + abc$$

### Bài 6.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ .

a) Chứng minh rằng

$$2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}) \geq abc + abd + acd + bcd + 4$$

b) Tìm min của

$$P = 7(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}) - abc + abd + acd + bcd$$

### Bài 7.

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin A}\right)^2 + \left(\frac{\sin C \cdot \sin A}{\sin B}\right)^2 + \left(\frac{\sin A \cdot \sin B}{\sin C}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$$

### Bài 8.

Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$p \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$$

### Bài 9.

Cho  $a, b, c, d, e \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d + e = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 + \frac{1845}{256} \cdot abcde \geq \frac{1}{256}$$

Bài 10.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (a^2 + \sqrt{a} + 3)(b^2 + \sqrt{b} + 3)(c^2 + \sqrt{c} + 3)$$

Bài 11. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2} + \frac{b+3}{(b+1)^2} + \frac{c+3}{(c+1)^2} \geq 3$$

Bài 12.

Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa mãn  $xy + yz + zx = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{y+z}} + \frac{1}{\sqrt{z+x}} + \frac{1}{\sqrt{x+y}} \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 13.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} + \sqrt{\frac{1-b}{1+b}} + \sqrt{\frac{1-c}{1+c}} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 14.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$3(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 4abcd \geq (a + b + c + d)(a^3 + b^3 + c^3 + d^3)$$

Bài 15. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$36(ab + bc + ca) \geq (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)(a^3 + b^3 + c^3)$$

Bài 16. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 1$ . Tìm min

$$P = \frac{ab + bc + ca}{(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4)(a^4 + b^4 + c^4)}$$

# DỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH

## I. Dồn biến không xác định.

Cái tên nghe có vẻ lạ nhỉ? Để tìm hiểu phương pháp mới mẻ này chúng ta hãy cùng bàn đến hai bài toán quen thuộc sau

### Bài toán 1.

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thuộc đoạn  $[p, q]$  với  $p, q$  là hai số thực cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

### Bài toán 2.

Cho  $n$  là số nguyên dương và là  $x_1, x_2, \dots, x_n$  các số thực không âm có tổng bằng  $n$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

(Ở cả hai bài trên thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đều là các biểu thức đối xứng của  $x_1, x_2, \dots, x_n$ )

Thông thường đối với các Bài toán 1 chúng ta thường sắp thứ tự các biến và dồn giá trị của biến về hai biên để so sánh trực tiếp chúng. Chẳng hạn so sánh  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  với  $f(p, x_2, \dots, x_n)$  với mục đích là đưa bài toán về trường hợp đơn giản với số lượng biến ít hơn. Còn với Bài toán 2 chắc chắn các bạn sẽ nghĩ ngay

đến đánh giá  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right)$  hoặc hi hữu lắm thì chúng

ta có đánh giá  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n)$ . Có thể thấy những suy nghĩ như trên là vô cùng tự nhiên nhưng nói chung là khó thực hiện vì những bài có thể giải trực tiếp là tương đối đơn giản. Vì vậy chúng ta cần một bước phát triển hơn cho phương pháp này đó là dồn biến không xác định. Vậy dồn biến không xác định là gì? Tôi có thể giới thiệu luôn tư tưởng chính của phương pháp này là “Dồn các biến tự do về một trong những điểm đặc biệt mà ta chưa thể xác định rõ sẽ dồn cụ thể về điểm đặc biệt nào”. Có vẻ hơi khó hiểu phải không? Chúng ta sẽ cùng quay trở lại với 2 bài toán trên

(i) Với Bài toán 1, thay vì chứng minh  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(p, x_2, \dots, x_n)$  chúng ta sẽ chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max\{f(p, x_2, \dots, x_n), f(q, x_2, \dots, x_n)\}$$

(ii) Với Bài toán 2, thay vì đánh giá đã nói ở trên chúng ta sẽ chỉ ra được

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min \left\{ f \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n \right), f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n) \right\}$$

Đọc đến đây bạn đừng vội cười vì nó chỉ tiến bộ hơn phương pháp ban đầu một chút khi điều kiện dồn biến được nói lỏng mà trông lại có vẻ phức tạp với max, min lằng nhằng! Bạn hãy xem thử sức mạnh của tư tưởng này thông qua ví dụ quen thuộc sau đây nhưng trước hết chúng ta hãy đến với **Bổ đề cơ bản**

### **Bổ đề 1.**

Cho  $a, b, c$  là các số thực thỏa mãn  $b \geq c$ . Khi đó ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng

$$(i) a \geq c$$

$$(ii) a \leq b$$

### **Chứng minh.**

Giả sử cả hai bất đẳng thức trên đều sai ta suy ra  $c > a > b \geq c$  (Mâu thuẫn).

### **Hệ quả 1.**

Cho  $a, b$  là các số thực. Khi đó ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng

$$(i) a \geq b$$

$$(ii) a \leq b$$

Các bạn đừng nên xem thường **Bổ đề 1**, tuy đây là một **Bổ đề** đơn giản theo đúng nghĩa của nó nhưng lại là một **Bổ đề** cực kỳ hiệu quả đấy. Sau đây là một ví dụ cho thấy điều đó

### **Ví dụ 1.**

Cho  $p, q$  là hai số thực dương,  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thuộc đoạn  $[p, q]$  với  $p, q$  là hai số thực dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức



$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

**Lời giải.**

$$\text{Đặt } S = x_2 + x_3 + \dots + x_n, T = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \dots + \frac{1}{x_n}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq f(p, x_2, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow (x_1 + S) \left( \frac{1}{x_1} + T \right) &\leq (p + S) \left( \frac{1}{p} + T \right) \\ \Leftrightarrow (x_1 - p) \left( T - \frac{S}{px_1} \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow T &\leq \frac{S}{px_1} \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq f(q, x_2, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow (x_1 + S) \left( \frac{1}{x_1} + T \right) &\leq (q + S) \left( \frac{1}{q} + T \right) \\ \Leftrightarrow (x_1 - q) \left( T - \frac{S}{qx_1} \right) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow T &\geq \frac{S}{qx_1} \end{aligned} \tag{2}$$

Do  $\frac{S}{px_1} \geq \frac{S}{qx_1}$  nên theo Bổ đề 1 sẽ có ít nhất một trong hai bất đẳng thức (1), (2)

đúng.

Suy ra  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max\{f(p, x_2, \dots, x_n), f(q, x_2, \dots, x_n)\}$

Hoàn toàn tương tự ta nhận được kết quả sau

Tồn tại  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \{p, q\}$  sao cho  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(y_1, y_2, \dots, y_n)$

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của  $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$  với  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \{p, q\}$ .

Không quá khó khăn chúng ta tìm được

+  $\max f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{n^2(p+q)^2}{4pq}$  với  $n$  chẵn khi trong tập  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  có  $\frac{n}{2}$  số

bằng  $p$  và  $\frac{n}{2}$  số còn lại bằng  $q$ .

+  $\max f(y_1, y_2, \dots, y_n) = 1 + \frac{(n^2-1)(p+q)^2}{4pq}$  với  $n$  lẻ khi trong tập  $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  có

$\frac{n-1}{2}$  số bằng  $p$  và  $\frac{n+1}{2}$  số còn lại bằng  $q$  hoặc ngược lại.

Từ đây chúng ta đi đến kết luận cho bài toán.

Chắc hẳn các bạn đã từng giải quyết bài toán này bằng cách sử dụng phương pháp hàm lồi cũng rất nhanh gọn nhưng có lẽ chúng ta phải công nhận với nhau rằng cách giải bằng tư tưởng dồn biến không xác định trên rất đẹp và phù hợp với trình độ của cả các bạn Trung học cơ sở. Bằng phép chứng minh tương tự, chúng ta có thể giải được bài toán sau

### Ví dụ 2.

Cho  $p, q$  là hai số thực dương,  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thuộc đoạn  $[p, q]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n}{x_1 x_2 \dots x_n}$$

Cả hai ví dụ trên đều đã có trên tạp chí Toán Học Và Tuổi Trẻ cùng với trường hợp  $n=3, p=1, q=2$  tuy nhiên cách chứng minh theo tôi được biết rất thiếu tự nhiên và khó có khả năng giải tổng quát.

Như vậy là đối với các bài toán bất đẳng thức có biên rõ ràng như Bài toán 1 thì chúng ta đã có một lời giải hợp lý còn với Bài toán 2 thì sao? Dù các biến không nằm trong một giới hạn rõ ràng nhưng chúng ta có thể tạm hiểu được rằng với hai biến  $x_1, x_2$  thì chúng luôn nằm trong  $[0, x_1 + x_2]$  và có những cặp điểm đặc biệt cần

chú ý là  $(0, x_1 + x_2)$  và  $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ . Để giải quyết triệt để Bài toán 2 chúng ta

sẽ cụ thể hóa tư tưởng dồn biến không xác định bằng định lý sau

## II. Định lý dồn biến không xác định U.M.V (Undefined Mixing Variables).

**Định lý U.M.V.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng là một hằng số dương cho trước.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là một hàm liên tục, đối xứng của  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min \left\{ f \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n \right), f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n) \right\}$$

với mọi  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó, giá trị nhỏ nhất của  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là giá trị nhỏ nhất của  $C_t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) trong đó  $C_t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ) là giá trị của  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  khi trong  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  có  $t$  số bằng 0 và  $n-t$  số còn lại bằng nhau.

### **Chứng minh.**

Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau

**Bổ đề 2.** Cho một bộ số thực không âm  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n \geq 2$ ) thực hiện phép biến đổi  $\Delta$  như sau

Chọn  $x_i = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$  và  $x_j = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Gán  $x_i, x_j$  bởi  $\frac{x_i + x_j}{2}$  nhưng vẫn giữ nguyên vị trí của chúng trong  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Khi đó sau vô hạn lần thực hiện ta được  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$ .

### **Chứng minh.**

Ký hiệu dãy ban đầu là  $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ .

Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với  $n = 2$  thì Bổ đề hiển nhiên đúng.

Giả sử bổ đề đúng với  $n := n-1$  ta chứng minh nó đúng với  $n := n$ .

Thật vậy, giả sử ở lần thứ  $k$  nào đó thực hiện phép biến đổi  $\Delta$  ta sẽ nhận được bộ  $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ .

Gọi  $m_k = \min\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}$ ,  $M_k = \max\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k\}$ .

Để thấy  $\{m_k\}$  là dãy không giảm bị chặn trên bởi  $M_1$  nên  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} m_k = m$ , còn  $\{M_k\}$  là dãy không tăng bị chặn dưới bởi  $m_1$  nên  $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$ .

Nếu ở bước thứ  $k$  nào đó thực hiện phép biến đổi  $\Delta$  mà  $x_1^k = m_k$  hoặc  $x_1^k = M_k$  thì  $x_1$  được gọi là có tham gia vào phép biến đổi  $\Delta$  ở bước thứ  $k$ .

Gọi  $u_1 < u_2 < \dots < u_s$  là tất cả những lần  $x_1$  tham gia phép biến đổi dưới vai trò số nhỏ nhất, còn  $v_1 < v_2 < \dots < v_t$  là tất cả những lần  $x_1$  tham gia phép biến đổi dưới vai trò số lớn nhất.

\*) Nếu  $s + t < \infty$ , đặt  $k_0 = \max\{s, t\}$  suy ra từ bước  $k_0$  trở đi thì  $x_1$  sẽ không tham gia vào phép biến đổi  $\Delta$  nữa. Như thế ta chỉ áp dụng phép biến đổi này cho bộ  $(x_2^{k_0}, x_3^{k_0}, \dots, x_n^{k_0})$ .

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta nhận được bộ

$$x_2^{k_0} = x_3^{k_0} = \dots = x_n^{k_0} = \frac{x_2^{k_0} + x_3^{k_0} + \dots + x_n^{k_0}}{n-1}.$$

Do  $x_1$  không tham gia vào phép biến đổi  $\Delta$  nào nữa nên

$$x_1^{k_0} = x_2^{k_0} = \dots = x_n^{k_0} = \frac{x_2^{k_0} + x_3^{k_0} + \dots + x_n^{k_0}}{n-1}$$

Từ đây ta có đpcm.

\*\*) Nếu  $s + t = \infty$ . Không giảm tổng quát, giả sử  $s = \infty$  suy ra  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^{u_k} = m$ .

### + Trường hợp 1. $t < \infty$

Do  $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = m, \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = M$  nên theo định nghĩa giới hạn thì với mọi  $\varepsilon > 0$  đủ nhỏ thì

$$\exists n_1 \text{ sao cho với mọi } N > n_1 \text{ thì } |m_N - m| < \varepsilon$$

$$\exists n_2 \text{ sao cho với mọi } N > n_2 \text{ thì } |M_N - M| < \varepsilon$$

Chọn  $n_3 = \max\{v_t, n_1, n_2\}$ , suy ra với mọi  $u_i - 1 > n_3$  thì

$$|m_{u_i-1} - m| < \varepsilon, |M_{u_i-1} - M| < \varepsilon$$

$$\text{mà } x_1^{u_i} = \frac{m_{u_i-1} + M_{u_i-1}}{2} \text{ nên } \left| x_1^{u_i} - \frac{M+m}{2} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{i \rightarrow \infty} x_1^{u_i} = \frac{M+m}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = \frac{M+m}{2}$$

**+ Trường hợp 2.**  $t = \infty$ .

Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_1^{u_i} = \frac{M+m}{2}$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_1^{v_i} = \frac{M+m}{2}$$

$$\text{Vì vậy } \lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = \frac{M+m}{2}$$

Do đó trong mọi trường hợp ta đều có

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_1^k = \frac{M+m}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta nhận được kết quả sau  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = \frac{M+m}{2}$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, n$

nên ta có đpcm.

### **Chứng minh định lý.**

Thực hiện thuật toán  $\beta_t$  với  $t \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  cho trường hợp tập  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  đã có  $t$  số  $x_1 = x_2 = \dots = x_t = 0$  như sau

Đề cho gọn ta quy ước  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_i, x_j)$  trong đó  $x_i = \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, x_j = \min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  thỏa mãn  $x_j > 0$ .

Tiến hành so sánh  $f(x_i, x_j)$  với  $f\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{x_i + x_j}{2}\right)$  và  $f(0, x_i + x_j)$ .

\*) Nếu  $f(x_i, x_j) < f(0, x_i + x_j)$  thì  $f(x_i, x_j) \geq f\left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{x_i + x_j}{2}\right)$ . Khi đó áp dụng

thuật toán  $\Delta$  cho  $\{x_{t+1}, x_{t+2}, \dots, x_n\}$ . Nếu trong một bước nào đó lại có

$f(x_i, x_j) \geq f(0, x_i + x_j)$  thì chuyển sang thuật toán  $\beta_{t+1}$ . Nếu không có thì phép biến đổi  $\Delta$  sẽ được thực hiện vô hạn lần nên  $x_{t+1}^\infty = x_{t+2}^\infty = \dots = x_n^\infty$ .

\*\*) Nếu  $f(x_i, x_j) \geq f(0, x_i + x_j)$  ta chuyển trực tiếp sang thuật toán  $\beta_{t+1}$ .

Rõ ràng thuật toán  $\beta_{n-1}$  đã là thuật toán hằng và đó là kết quả cố định.

Vì vậy định lý đã được chứng minh hoàn chỉnh.

Trong Định lý U.M.V ta có thể thay thế điều kiện tổng các biến bằng các điều kiện khác như tổng bình phương, tổng lập phương... và có cách dồn biến tương ứng thì định lý vẫn đúng và cách chứng minh không có gì khác.

**Hệ quả.** Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng là một hằng số dương cho trước.  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  là một hàm liên tục, đối xứng của  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \min \left\{ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \dots, x_n\right), f(0, x_1+x_2, \dots, x_n) \right\} \\ f(0, x_2, x_3, \dots, x_n) \geq 0 \\ f\left(\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}, \dots, \frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}\right) \geq 0 \end{array} \right.$$

với mọi  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn điều kiện đã cho thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ .

### III. Một số ứng dụng của phương pháp dồn biến không xác định.

Để sử dụng phương pháp dồn biến không xác định rõ ràng ta phải thực hiện theo trình tự hai bước

**Bước 1.** Xác lập điều kiện dồn biến.

**Bước 2.** Giải quyết bài toán với điều kiện đã xác lập bên trên.

Hẳn nhiên Bước 2 chính là nội dung của Định lý U.M.V và đã được giải quyết một cách hoàn toàn triệt để. Do đó, phần quan trọng nhất của chúng ta cần phải làm đó là thực hiện được Bước 1. Một điều kì lạ là bước này thường được xử lý rất gọn nhẹ bằng cách sử dụng Bổ đề 1, một bổ đề gần như hiển nhiên dựa trên quan hệ thứ tự của các số trên trục số thực. Chúng ta hãy tìm hiểu rõ hơn qua các ví dụ đặc trưng sau

### Ví dụ 3. (Phát triển từ một bài IMO)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ .

Tìm số thực dương  $k_n$  tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \leq 2^n + k_n \cdot (x_1 x_2 \dots x_n - 1)$$

**Lời giải.**

Đặt  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) - 2^n - k_n \cdot (x_1 x_2 \dots x_n - 1)$

$$S = (1+x_3)(1+x_4)\dots(1+x_n)$$

$$T = x_3 x_4 \dots x_n$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \dots, x_n\right) \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)S - k_n x_1 x_2 T - \left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 S + k_n \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 T \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 (k_n T - S) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k_n T \leq S \quad (3.2)$$

$$f((x_1, x_2, \dots, x_n)) \leq f((0, x_1+x_2, \dots, x_n)) \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)S - k_n x_1 x_2 T - (1+x_1+x_2)S \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k_n T \geq S \quad (3.4)$$

Từ (3.2), (3.4) ta có ngay ít nhất một trong hai bất đẳng thức (3.1), (3.3) đúng suy ra

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \left\{ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, \dots, x_n\right), f(0, x_1+x_2, \dots, x_n) \right\}$$

Theo Định lý U.M.V ta có

$$\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \max C_t \quad (t = 0, 1, \dots, n-1)$$

$$= \max\{C_0, C_1\}$$

$$= \max \left\{ 0, \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1} - 2^n + k_n \right\}$$

Vì vậy để bất đẳng thức ở đề bài thỏa mãn thì

$$\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1} - 2^n + k_n \leq 0$$

$$\Leftrightarrow k_n \leq 2^n - \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Do đó giá trị tốt nhất của  $k_n$  thỏa mãn đề bài là  $k_n = 2^n - \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}$

Ví dụ 3 thực sự là một bài toán rất khó đã từng có mặt ở dạng này hay dạng khác trong các đề thi vô địch. Chắc chắn các bạn đã từng cảm nhận được biểu thức đạt giá trị tốt nhất ngoài trường hợp  $n$  biến bằng nhau thì còn một trường hợp một biến bằng 0 nhưng vẫn vô cùng tức tối vì không có cách nào ép nó về được 0. Giờ đây U.M.V đã cho bạn một hướng đi khá sáng sủa.

#### Ví dụ 4. (Đình Ngọc An)

Cho  $p \leq n$  là các số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p})^k$$

Trong đó  $k$  là số thực không nhỏ hơn 2.

#### Lời giải.

Đặt

$$A = \sum_{3 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{p-2} \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p-2}})^k$$

$$B = \sum_{3 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_{p-1} \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{p-1}})^k$$

$$C = \sum_{3 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p})^k$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \left\{ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right), f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n) \right\}$$

Thật vậy



$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n\right) \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow x_1^k x_2^k A + (x_1^k + x_2^k)B - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k} A - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k B \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k} \geq \frac{B}{A}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow x_1^k x_2^k A + (x_1^k + x_2^k)B - (x_1 + x_2)^k B \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{A} \geq \frac{x_1^k x_2^k}{(x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k}$$

Để ít nhất một trong hai bất đẳng thức (4.1), (4.2) chắc chắn đúng thì

$$\begin{aligned} & \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k} \geq \frac{x_1^k x_2^k}{(x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k} \\ \Leftrightarrow & \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k x_2^k} \geq \frac{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k}{(x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k} \\ \Leftrightarrow & \frac{\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^{2k}}{x_1^k x_2^k} \geq \frac{(x_1 + x_2)^k - 2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^k}{(x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k} \\ \Leftrightarrow & \frac{(x_1 + x_2)^{2k}}{2^{2k} x_1^k x_2^k} \geq \frac{(2^{k-1} - 1)(x_1 + x_2)^k}{2^{k-1}((x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k)} \\ \Leftrightarrow & (x_1 + x_2)^k ((x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k) \geq (2^{2k} - 2^{k+1})x_1^k x_2^k \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên do

$$(x_1 + x_2)^k \geq 2^k (x_1 x_2)^{\frac{k}{2}} \quad (\text{theo bất AM-GM})$$

$$(x_1 + x_2)^k - x_1^k - x_2^k \geq (2^k - 2)(x_1 x_2)^{\frac{k}{2}} \quad \text{với } k \geq 2$$

Vậy ta có

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \max \left\{ f \left( \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, \dots, x_n \right), f(0, x_1 + x_2, \dots, x_n) \right\}$$

Vì thế theo Định lý U.M.V ta có

$$\begin{aligned} \max f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \max C_t \quad (t = 0, 1, \dots, n-1) \\ &= \max C_{n-t}^p \cdot \left( \frac{n}{n-t} \right)^{kp} \quad (t = 0, 1, \dots, n-1) \\ &= \max \left\{ C_n^p, C_{n-1}^p \cdot \left( \frac{n}{n-1} \right)^{kp} \right\} \end{aligned}$$

Với  $n = 3$  ta có bài toán quen thuộc

Cho  $a, b, c, k \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max \left\{ 3, \left( \frac{3}{2} \right)^{2k} \right\}$$

Bạn thấy có điều gì kì lạ không? Hình như U.M.V này chẳng thèm quan tâm đến số biến  $n = 3$  hay  $n$  bất kì thì cũng thế.

### Ví dụ 5. (tổng quát từ bất Turkervici)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_{2n}$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) + nx_1 x_2 \dots x_{2n} \geq \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} x_i^n x_j^n$$

### Lời giải.

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1 x_2 \dots x_{2n} \geq \left( \sum_{i=1}^{2n} x_i^n \right)^2$$

Đặt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) = (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1 x_2 \dots x_{2n} - \left( \sum_{i=1}^{2n} x_i^n \right)^2$$

$$s = x_1 x_2$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}} \geq x_1 x_2 = s$$

Ta có

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \geq f\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, x_3, \dots, x_{2n}\right) \quad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1 x_2 \dots x_{2n} - \\ - (2n-1)\left(2\left(\frac{x_1^n + x_2^n}{2}\right)^2 + x_3^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}\right) - 2n\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}\right)^2 x_3 \dots x_{2n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1^n - x_2^n)^2}{2} \left( (2n-1) - \frac{nx_3 \dots x_{2n}}{t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{n} \cdot (t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1}) \geq x_3 \dots x_{2n}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \geq f\left(0, \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}, x_3, \dots, x_{2n}\right) \quad (5.2)$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1 x_2 \dots x_{2n} - (2n-1)((x_1^n + x_2^n)^2 + \dots + x_{2n}^{2n}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 \left( x_3 \dots x_{2n} - \frac{2n-1}{n} \cdot x_1^{n-1} x_2^{n-1} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_3 \dots x_{2n} \geq \frac{2n-1}{n} \cdot x_1^{n-1} x_2^{n-1}$$

Vì  $\frac{2n-1}{n} \cdot (t^{n-1} + t^{n-2}s + \dots + s^{n-1}) \geq \frac{2n-1}{n} \cdot s^{n-1} = \frac{2n-1}{n} x_1^{n-1} x_2^{n-1}$  nên theo Bổ đề 1 thì

có ít nhất một trong hai bất đẳng thức (5.1), (5.2) đúng.

Vậy

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) \geq \min \left\{ f\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, x_3, \dots, x_{2n}\right), f\left(0, \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}, x_3, \dots, x_{2n}\right) \right\}$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$(2n-1)(x_2^{2n} + x_3^{2n} + \dots + x_{2n}^{2n}) \geq (x_2^n + x_3^n + \dots + x_{2n}^n)^2$$

nên  $f(0, x_2, x_3, \dots, x_{2n}) \geq 0$ .

Mặt khác  $f(\underbrace{t \circ \dots \circ t}_{2n \text{ số } t}) = 0$  nên theo Hệ quả của định lý U.M.V, ta có điều phải chứng

minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_{2n}$  hoặc  $x_1 = 0, x_2 = x_3 = \dots = x_{2n}$  và các hoán vị.

Ví dụ 5 là bài toán tổng quát của Bất đẳng thức Turkervici ( $n = 4$ ). Trên thực tế với trường hợp riêng này, bài toán đã rất khó và với trường hợp tổng quát nó đã thể hiện được gần như toàn bộ vẻ đẹp của phương pháp này... Bạn thấy không? Nó cũng “dễ thương” đấy chứ?

## Bài tập ứng dụng

### Bài 1. (Đinh Ngọc An)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thuộc  $[1, 2]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)^2$$

### Bài 2. (Đinh Ngọc An)

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm có tổng bằng 3,  $k, m$  là các số thực thỏa mãn  $k \geq 1, m \geq 0$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a, b, c) = a^{2k} + b^{2k} + c^{2k} + m[(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k]$$

### Bài 3. (Đinh Ngọc An)

Cho  $p \leq n$  là các số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p})^k$$

Trong đó  $k$  là số thực bất kì.

### Bài 5. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a, b, c, d) = (2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2)(2 + d^2)$$

### Bài 6. (Đinh Ngọc An)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ . Tìm số thực  $m$  tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi bộ  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa mãn đề bài

$$x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m + x_1 x_2 \dots x_n \geq n + 1$$

Bài 7. (IMO Shortlist 1993)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng

$$abc + abd + acd + bcd \leq \frac{1}{27} + \frac{176}{27} \cdot abcd$$

Bài 8. (Crux mathematicorum)

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{1 + \frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{48c}{a+b}} \geq 15$$

Bài 9. (Đình Ngọc An)

Tìm thực  $k$  tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a, b, c \geq 0$

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + \frac{k(ab + bc + ca)}{a + b + c} + 1 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Bài 10. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ .

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 + x_1 x_2 \dots x_n \left( \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)$$

Bài 11. (Vũ Đình Quý)

Cho  $n$  là số nguyên dương và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực không âm có tổng bằng  $n$ .

Tìm giá trị tốt nhất của số thực  $k$  sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \dots + \frac{1}{n-1+x_n} + kx_1 x_2 \dots x_n \leq 1 + k$$

# PHƯƠNG PHÁP THAM SỐ HÓA

## 1. Đặt vấn đề.

Đối với phần lớn các bất đẳng thức đại số không đối xứng với các biến thì dấu bằng trong các bất đẳng thức này xảy ra khi các giá trị các biến không bằng nhau. Trong chương trình phổ thông thì các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski lại được phát biểu dưới dạng đối xứng, dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tỉ lệ. Việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển trên để giải các bài toán cực trị không đối xứng cần được quan tâm một cách thích đáng. Qua bài viết này, tôi muốn nêu một phương pháp giải bài toán cực trị không đối xứng bằng cách sử dụng các bất đẳng thức cổ điển thông dụng gọi là phương pháp tham số hóa.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này như sau: từ việc phân tích tính không đối xứng của các biến có trong bài toán cực trị, thường được cho dưới các dạng:

Dạng 1. Hệ số các biến trong biểu thức cần tìm cực trị là không bằng nhau.

Dạng 2. Các biến thuộc các miền khác nhau của tập số thực.

Dạng 3. Điều kiện ràng buộc của các biến trong giả thiết bài toán là không đối xứng với các biến.

Ta đưa thêm vào các tham số phụ cần thiết thường là các hệ số hoặc lũy thừa của các biến có trong các đánh giá trung gian, sau đó chọn các tham số phụ để tất cả các dấu đẳng thức xảy ra, từ đó nhận được 1 hệ phương trình mà ẩn là các biến và các tham số phụ, tham số phụ được chọn hợp lí chỉ khi hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Trong bài viết này tôi nêu một lớp bài toán cực trị không đối xứng thường gặp, tác giả nghĩ rằng những mô hình cụ thể này thật có ý nghĩa vì với kết quả của các bài toán này sẽ cho ta một lớp bài toán cực trị không đối xứng cụ thể miễn là xây dựng được bộ biến thỏa mãn điều kiện ràng buộc tương ứng.

## 2. Một số bài toán điển hình.

### Bài toán 1.

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  $xy + yz + zx = 1$  và cho  $a$  là số thực dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(x^2 + y^2) + z^2.$$

**Lời giải.**

*Phân tích.* Điều kiện ràng buộc đối xứng với  $x, y, z$ .

Biểu thức  $P$  đối xứng với  $x, y$ , vai trò của  $z$  trong biểu thức  $P$  là không đối xứng với  $x, y$ .

Do vậy, ta có thể nghĩ rằng điểm cực trị sẽ đạt được khi  $x = y$ , và  $\frac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2$ .

Từ phân tích trên, ta có thể trình bày lời giải của bài toán như sau

Với  $\alpha > 0$  (chọn sau), áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta có

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz$$

$$\alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2) \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy$$

Cộng về các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)(x^2 + y^2) + z^2 \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(xy + yz + zx) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Chọn  $\alpha$  sao cho  $\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = a$ .

hay

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} \frac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$  hay  $\begin{cases} x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{1+8a}} \\ z = \frac{-1 + \sqrt{1+8a}}{2\sqrt[4]{1+8a}} \end{cases}$

Kết luận

$$\min P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}.$$



## Bài toán 2.

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn điều kiện  $ab + bc + ca = 1$  và  $u, v$  là các số dương cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = ua^2 + vb^2 + c^2.$$

### Lời giải.

Một cách tự nhiên từ lời giải của Bài toán 1, ta phân tích

$$u = x + y, v = z + t, 1 = m + n$$

trong đó  $x, y, z, t, m, n$  là các số dương sẽ chọn sau.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta có

$$xa^2 + tb^2 \geq 2\sqrt{xtab},$$

$$ya^2 + nc^2 \geq 2\sqrt{ynca},$$

$$zb^2 + mc^2 \geq 2\sqrt{zmbc}.$$

Cộng về các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$P \geq 2\sqrt{xtab} + 2\sqrt{ynca} + 2\sqrt{zmbc}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} xa^2 = tb^2 \\ ya^2 = nc^2 \\ zb^2 = mc^2 \end{cases}$$

hay

$$\begin{cases} \frac{x}{t} = \frac{b^2}{a^2} \\ \frac{n}{y} = \frac{a^2}{c^2} \\ \frac{z}{m} = \frac{c^2}{b^2} \end{cases} \Rightarrow xzn = ytm. \quad (1)$$

Chọn  $x, y, z, t, m, n$  sao cho  $xt = yn = zm = k^2$  thỏa mãn (1).

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow (x + y)(z + t)(m + n) = uv$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (xz + xt + yz + yt)(m + n) = uv \\ &\Leftrightarrow xzm + xtm + yzm + ytm + xzn + xtn + yzn + ytn = uv \\ &\Leftrightarrow (x + y + m + n + z + t)k^2 + 2xzn = uv \\ &\Leftrightarrow (u + v + 1)k^2 + 2xzn = uv \end{aligned}$$

Mà  $(xzn)(utm) = k^6$  nên  $xzn = k^3$ .

Do đó

$$2k^3 + (u + v + 1)k^2 - uv = 0 \quad (2)$$

Rõ ràng (2) có nghiệm dương duy nhất  $k_0$ .

Vậy  $\min P = 2k_0$  với  $k_0$  là nghiệm dương duy nhất của phương trình (2).

### Nhận xét.

Bài toán 1 và Bài toán 2 thực sự có ý nghĩa khi ta chọn  $x, y, z$  hoặc  $a, b, c$  là các biến đặc biệt, miễn là điều kiện ràng buộc của các biến được thỏa mãn. Chẳng hạn, khi ta chọn mô hình là tam giác  $ABC$ .

Nếu đặt  $x = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ ,  $y = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ ,  $z = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$ , ta sẽ có  $xy + yz + zx = 1$ , áp dụng vào mô hình

Bài toán 1 hoặc Bài toán 2 ta sẽ thu được một lớp các bài toán cực trị dạng không đối xứng trong tam giác.

Hoặc là  $x = \operatorname{cotg} A$ ,  $y = \operatorname{cotg} B$ ,  $z = \operatorname{cotg} C$ , ta cũng sẽ có ràng buộc  $xy + yz + zx = 1$ , tương tự ta cũng sẽ có một lớp các bài toán cực trị không đối xứng khác đối với tam giác.

Nói chung, tư tưởng chính của Bài toán 1 và Bài toán 2 là muốn xây dựng một lớp các bài toán mới ta chỉ cần xây dựng một lớp các biến đại số, hoặc lượng giác thỏa mãn điều kiện ràng buộc tương ứng. Thiết nghĩ rằng từ tư tưởng này có thể xây dựng được rất nhiều lớp bài toán như thế.

### Bài toán 3.

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  và  $|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} |x_i - x_j|.$$

**Lời giải.**

+ Trường hợp 1.  $n = 2$  là trường hợp tầm thường vì lúc này  $P = 1$  không đổi,

+ Trường hợp 2.  $n = 3$ , không mất tính tổng quát ta giả sử  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số không âm, ta có

$$\begin{aligned} \frac{P}{2} &= (x_2 - x_1) \left( \frac{x_3 - x_1}{2} \right) (x_3 - x_2) \\ &\leq \left( \frac{(x_2 - x_1) + \left( \frac{x_3 - x_1}{2} \right) + (x_3 - x_2)}{3} \right)^3 \\ &= \left( \frac{x_3 - x_1}{2} \right)^3 \\ &\leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Do đó  $P \leq \frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ |x_3 - x_1| = |x_1| + |x_2| + |x_3| = 1 \\ x_2 - x_1 = \frac{x_3 - x_1}{2} = x_3 - x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2} \end{cases} .$$

Vậy

$$\max P = \frac{1}{4} .$$

+ Trường hợp 3.  $n = 4$ , một cách tự nhiên ta dự đoán rằng  $\max P$  đạt được khi

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

Với giả thiết  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ .

Như vậy thì  $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ .

Nếu xem hiệu  $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$  là đơn vị và đặt  $x_3 - x_2 = a$ , thì ta sẽ có bộ biến mà biểu thức  $P$  đạt max cần thỏa mãn điều kiện

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp  $n = 4$  sẽ như sau

Với giả thiết  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$ , ta có

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{P}{a(a+2)(a+1)^2} &= \\ &= (x_2 - x_1) \cdot \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} \cdot \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} \cdot \frac{(x_3 - x_2)}{a} \cdot \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} \cdot (x_4 - x_3) \\ &\leq \left( \frac{(x_2 - x_1) + \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3)}{6} \right)^6 \\ &= \left( \frac{(x_4 - x_1) \left( 1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} \right) + \left( -1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} \right) (x_3 - x_2)}{6} \right)^6 \end{aligned}$$

Ta chọn  $a > 0$  sao cho

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} = -1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}$$

hay  $a = \sqrt{2} - 1$ . Khi đó,

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} = -1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

và ta thu được

$$\frac{P}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2})^2} \leq \left( \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)}{6} \right)^6 \leq \frac{1}{2^9}$$

$$\text{hay } P \leq \frac{1}{2^8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ |-x_1 - x_2 + x_3 + x_4| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \\ x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{2} - 1} = \frac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = \frac{x_4 - x_1}{\sqrt{2} + 1} \geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được

$$\begin{cases} x_4 = -x_1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Kết luận

$$\max P = \frac{1}{2^8}.$$

+ Trường hợp 4.  $n = 5$ .

*Phân tích.*

Với giả thiết  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , từ lời giải của các trường hợp 2 và 3, một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay rằng bộ số để  $P$  đạt max là  $x_5 = -x_1, x_4 = -x_2, x_3 = 0$ .

Do vậy  $x_5 - x_4 = x_2 - x_1, x_3 - x_2 = x_4 - x_3$ , từ đó ta có thể đoán nhận rằng nếu xem hiệu  $x_2 - x_1$  bằng đơn vị và  $x_3 - x_2$  bằng  $a$  thì bộ số để  $P$  đạt max cần phải thỏa điều kiện

$$\begin{aligned} \frac{x_2 - x_1}{1} = \frac{x_4 - x_3}{a} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_5 - x_3}{a+1} = \\ = \frac{x_4 - x_2}{2a} = \frac{x_5 - x_2}{2a+1} = \frac{x_4 - x_1}{2a+1} = \frac{x_5 - x_1}{2a+2} = \frac{x_5 - x_4}{1} \end{aligned}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp  $n = 5$  sẽ như sau

Không mất tính tổng quát, ta giả sử  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$ , từ đó suy ra

$$\begin{aligned} P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_5 - x_1)(x_3 - x_2) \times \\ \times (x_4 - x_2)(x_5 - x_2)(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4) \end{aligned}$$

Xét biểu thức

$$Q = \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}$$

Viết  $Q$  dưới dạng

$$Q = \frac{(x_2 - x_1)}{1} \cdot \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} \cdot \frac{(x_4 - x_1)}{2a+1} \cdot \frac{(x_5 - x_1)}{2a+2} \cdot \frac{(x_3 - x_2)}{a} \times \\ \times \frac{(x_4 - x_2)}{2a} \cdot \frac{(x_5 - x_2)}{2a+1} \cdot \frac{(x_4 - x_3)}{a} \cdot \frac{(x_5 - x_3)}{a+1} \cdot \frac{(x_5 - x_4)}{1}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM cho 10 số không âm, ta có

$$Q \leq \frac{1}{10^{10}} \left( \frac{(x_2 - x_1)}{1} + \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{2a+1} + \frac{(x_5 - x_1)}{2a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \right. \\ \left. + \frac{(x_4 - x_2)}{2a} + \frac{(x_5 - x_2)}{2a+1} + \frac{(x_4 - x_3)}{a} + \frac{(x_5 - x_3)}{a+1} + \frac{(x_5 - x_4)}{1} \right)^{10} \\ = \frac{1}{10^{10}} \left( (x_5 - x_1) \left( 1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2(a+1)} \right) + (x_4 - x_2) \left( -1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2a} \right) \right)^{10}$$

Chọn  $a > 0$  sao cho

$$1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2(a+1)} = -1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2a}$$

hay  $a = \frac{1}{2}$ . Khi đó,

$$\begin{cases} 1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2(a+1)} = -1 + \frac{1}{2a+1} + \frac{3}{2a} = \frac{5}{2} \\ Q = \frac{4P}{27} \end{cases}$$

Từ đây, ta thu được

$$Q \leq \frac{1}{10^{10}} \cdot \left( \frac{5}{2} \cdot (-x_1 - x_2 + x_4 + x_5) \right)^{10} \leq \frac{1}{2^{20}}$$

Do đó  $P \leq \frac{27}{2^{22}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ |-x_1 - x_2 + x_4 + x_5| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| = 1 \\ x_2 - x_1 = \frac{2(x_3 - x_1)}{3} = \frac{x_4 - x_1}{2} = \frac{x_5 - x_1}{3} = 2(x_3 - x_2) = \\ = x_4 - x_2 = \frac{x_5 - x_2}{2} = 2(x_4 - x_3) = \frac{2(x_5 - x_3)}{3} = x_5 - x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được

$$\begin{cases} x_1 = -x_5 = -\frac{3}{8} \\ x_2 = -x_4 = -\frac{1}{8} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Kết luận

$$\max P = \frac{27}{2^{22}}.$$

**Nhận xét.**

Bằng phương pháp tương tự sẽ tìm được lời giải của bài toán với  $n \geq 6$ .

**Bài toán 4. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

Cho  $m, n, p$  là độ dài ba cạnh của một tam giác cho trước và tam giác  $ABC$  nhọn.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \operatorname{tg}^m A \cdot \operatorname{tg}^n B \cdot \operatorname{tg}^p C.$$

**Lời giải.**

Xét biểu thức

$$Q = \frac{1}{P} = \operatorname{cotg}^m A \cdot \operatorname{cotg}^n B \cdot \operatorname{cotg}^p C.$$

Bài toán đã cho tương đương với tìm max của  $Q$ .

Khi nhìn thấy biểu thức  $Q$ , ít nhiều ta cũng nghĩ đến đẳng thức quen thuộc

$$\operatorname{cotg} A \cdot \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} B \cdot \operatorname{cotg} C + \operatorname{cotg} C \cdot \operatorname{cotg} A = 1$$

Và từ đây, ta nghĩ ngay rằng bài này có thể dùng bất đẳng AM-GM suy rộng, do đó ta đưa vào các tham số dương  $x, y, z$  (chọn sau) sao cho

$$Q = (\cotgA.\cotgB)^x . (\cotgB.\cotgC)^y . (\cotgC.\cotgA)^z$$

$$= (\cotgA)^{x+z} . (\cotgB)^{x+y} . (\cotgC)^{y+z} .$$

Ta phải chọn  $x, y, z$  sao cho

$$\begin{cases} x+z = m \\ x+y = n \\ y+z = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} . (m+n-p) \\ y = \frac{1}{2} . (-m+n+p) . \\ z = \frac{1}{2} . (m-n+p) \end{cases}$$

Từ đây, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z} = \left( \frac{\cotgA.\cotgB}{x} \right)^x \cdot \left( \frac{\cotgB.\cotgC}{y} \right)^y \cdot \left( \frac{\cotgC.\cotgA}{z} \right)^z$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}} \cdot \left( x \left( \frac{\cotgA.\cotgB}{x} \right) + y \left( \frac{\cotgB.\cotgC}{y} \right) + z \left( \frac{\cotgC.\cotgA}{z} \right) \right)^{x+y+z}$$

$$= \frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}}$$

$$\text{Do đó } Q \leq \frac{x^x y^y z^z}{(x+y+z)^{x+y+z}}$$

Suy ra

$$P \geq \frac{(x+y+z)^{x+y+z}}{x^x y^y z^z} = \sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p} (m-n+p)^{m-n+p} (m+n-p)^{m+n-p}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\cotgA.\cotgB}{x} = \frac{\cotgB.\cotgC}{y} = \frac{\cotgC.\cotgA}{z} .$$

Hay



$$\begin{cases} \cotg A = \sqrt{\frac{xz}{y(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{(m-n+p)(m+n-p)}{(-m+n+p)(m+n+p)}} \\ \cotg B = \sqrt{\frac{xy}{z(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{(-m+n+p)(m+n-p)}{(m-n+p)(m+n+p)}} \\ \cotg C = \sqrt{\frac{yz}{x(x+y+z)}} = \sqrt{\frac{(m-n+p)(-m+n+p)}{(m+n-p)(m+n+p)}} \end{cases}$$

Kết luận

$$\min P = \sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p} (m-n+p)^{m-n+p} (m+n-p)^{m+n-p}}}$$

### Bài toán 5. (Vietnam TST 2001)

Cho  $a, b, c > 0$  và  $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}.$$

**Lời giải.**

*Phân tích.* Để đơn giản, ta sẽ đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c}$  thì ta nhận được một bài toán

tương đương như sau

“ $x, y, z > 0$  và  $6x + 12y + 21z \leq 6xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z.$$
”

Nhận thấy từ giả thiết  $6x + 12y + 21z \leq 6xyz$ , ta có thể suy ra được

$$x^m y^n z^p \geq k \quad (m, n, p > 0)$$

Do đó ta nghĩ ngay rằng bài này có thể sử dụng bất đẳng thức AM-GM suy rộng được.

Thật vậy

$$\begin{aligned} P &= m \cdot \frac{x}{m} + n \cdot \frac{y}{n} + p \cdot \frac{z}{p} \\ &\geq (m+n+p) \left( \left( \frac{x}{m} \right)^m \cdot \left( \frac{y}{n} \right)^n \cdot \left( \frac{z}{p} \right)^p \right)^{\frac{1}{m+n+p}} \end{aligned}$$

$$\geq (m+n+p) \left( \frac{k}{m^m n^n p^p} \right)^{\frac{1}{m+n+p}}$$

Như vậy, nhiệm vụ của ta bây giờ chỉ là phải tìm  $m, n, p$  nữa thôi.

Rõ ràng, ta chỉ cần xét  $m+n+p=1$  là đủ. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} 6xyz &\geq 6x+12y+21z \\ &= 6m \cdot \frac{x}{m} + 12n \cdot \frac{y}{n} + 21p \cdot \frac{z}{p} \\ &\geq (6m+12n+21p) \left( \left( \frac{x}{m} \right)^{6m} \cdot \left( \frac{y}{n} \right)^{12n} \cdot \left( \frac{z}{p} \right)^{21p} \right)^{\frac{1}{6m+12n+21p}} \end{aligned}$$

Để tìm  $m, n, p$  ta cần phải giải hệ sau

$$\begin{cases} 1 - \frac{6m}{6m+12n+21p} = km \\ 1 - \frac{12n}{6m+12n+21p} = kn \\ 1 - \frac{21p}{6m+12n+21p} = kp \\ m+n+p=1 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} 1 - \frac{6m}{6m+12n+21p} = 2m \\ 1 - \frac{12n}{6m+12n+21p} = 2n \\ 1 - \frac{21p}{6m+12n+21p} = 2p \\ m+n+p=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1-n-p \\ 4n^2+10np+6n-5p=2 \\ 5p^2+2np-n+3p=1 \end{cases}$$

Xét hệ (\*)  $\begin{cases} 4n^2+10np+6n-5p=2 \\ 5p^2+2np-n+3p=1 \end{cases}$

Đặt  $n=tp$  ( $t>0$ ), hệ (\*) trở thành  $\begin{cases} (2t+5)p^2+(3-t)p=1 & (1) \\ (4t^2+10t)p^2+(6t-5)p=2 & (2) \end{cases}$

Lấy (2) - 2x(1), ta được

$$p((4t^2 + 6t - 10)p + 8t - 11) = 0$$

Nếu  $t = 1$  thì hệ (\*) vô nghiệm, do đó  $t \neq 1$ .

$$\Rightarrow p = \frac{11 - 8t}{4t^2 + 6t - 10} \quad (3)$$

Do  $p > 0, t > 0$  nên  $1 < t < \frac{11}{8}$ . Thay (3) vào (1) và thu gọn, ta được

$$16t^4 - 12t^3 - 146t^2 + 30t + 175 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4t - 5)(2t + 5)(2t^2 - 4t - 7) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5}{4} \quad (\text{do } 1 < t < \frac{11}{8})$$

Từ đó, ta có  $\begin{cases} m = \frac{2}{5} \\ n = \frac{1}{3} \\ p = \frac{4}{15} \end{cases}$ . Thử lại, ta thấy thỏa.

Đẳng thức ở trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{m} = \frac{y}{n} = \frac{z}{p} \\ 6x + 12y + 21z = 5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{2} = 3y = \frac{15z}{4} \\ 6x + 12y + 21z = 5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \frac{5}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ các phân tích và chọn tham số trên, ta đi đến một lời giải cực kỳ đơn giản như sau

Đặt  $a = \frac{1}{3x}, b = \frac{4}{5y}, c = \frac{3}{2z}$ , bài toán chuyển về

“ $x, y, z > 0$  và  $3x + 5y + 7z \leq 15xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6x + 5y + 4z).”$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$15xyz \geq 3x + 5y + 7z \geq 15\sqrt[15]{x^3 y^5 z^7}$$

$$\Rightarrow \sqrt[15]{x^{12} y^{10} z^8} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[15]{x^6 y^5 z^4} \geq 1$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6x + 5y + 4z) \geq \frac{15}{2} \cdot \sqrt[15]{x^6 y^5 z^4} \geq \frac{15}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ 15xyz = 3x + 5y + 7z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết luận

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

### Bài toán 6.

Cho  $x, y, z \geq 0$  và  $x + y + z = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x^4 + 2y^4 + 3z^4$$

**Lời giải.**

Với mọi số dương  $a, b, c$ , theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$P(a^4 + 2b^4 + 3c^4)^3 \geq (a^3 x + 2b^3 y + 3c^3 z)^4$$

Chọn  $a, b, c$  sao cho  $a^3 = 2b^3 = 3c^3 = k^3$ , khi đó, ta có

$$P \geq \frac{k^{12}(x+y+z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3} = \frac{(3k^3)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}$$

Để đẳng thức xảy ra thì ta phải có

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = 1$$

Do vậy, ta có

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^3=2b^3=3c^3=k^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=k \\ b=\sqrt[3]{2}k \\ c=\sqrt[3]{3}k \\ k=\frac{3}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra kết quả của bài toán.

### Bài toán 7.

Chúng minh rằng với mọi số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta luôn có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \dots + \frac{n}{a_1+a_2+\dots+a_n} < 4 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

### Chứng minh.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} (a_1+a_2+\dots+a_k) \left( \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} \right) &\geq (x_1+x_2+\dots+x_k)^2 \\ \Rightarrow \frac{k}{a_1+a_2+\dots+a_k} &\leq \frac{k}{(x_1+x_2+\dots+x_k)^2} \cdot \left( \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} \right) \end{aligned}$$

Cô định các số  $x_1, x_2, \dots, x_n$  và cho  $k$  chạy từ 1 đến  $n$ , rồi lấy tổng, ta được

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1+a_2} + \dots + \frac{n}{a_1+a_2+\dots+a_n} \leq \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_n}{a_n}$$

Trong đó

$$c_k = \frac{kx_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2} + \frac{(k+1)x_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})^2} + \dots + \frac{nx_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}$$

Ta có thể chọn  $x_k = k \quad \forall k = \overline{1, n}$ , khi đó

$$\begin{aligned} c_k &= k^2 \left( \frac{k}{(1+2+\dots+k)^2} + \frac{k+1}{(1+2+\dots+(k+1))^2} + \dots + \frac{n}{(1+2+\dots+n)^2} \right) \\ &= 4k^2 \left( \frac{k}{k^2(k+1)^2} + \frac{k+1}{(k+1)^2(k+2)^2} + \dots + \frac{n}{n^2(n+1)^2} \right) \\ &= 4k^2 \left( \frac{1}{k(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)^2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)^2} \right) \\ &= 4k^2 \left( \frac{1}{k+1} \cdot \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) + \frac{1}{k+2} \cdot \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) + \dots + \frac{1}{n+1} \cdot \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right) \\ &= 4k^2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(k+1)^2} - \frac{1}{(k+2)^2} - \dots - \frac{1}{(n+1)^2} \right) \\ &< 4k^2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} - \frac{1}{(k+2)(k+3)} - \dots - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right) \\ &= 4k^2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &< 4k^2 \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &< \frac{4k}{k+1} \\ &< 4 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

### **Bài toán 8.**

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực  $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$x_1^2 + \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

### **Chứng minh.**

Với mọi số dương  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tùy ý, ta có

$$\left( \frac{x_1^2}{c_1} + \frac{x_2^2}{c_2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k} \right) (c_1 + c_2 + \dots + c_k) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2$$

Do đó

$$\begin{aligned} \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} \right)^2 &\leq \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k^2 c_1} \cdot x_1^2 + \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k^2 c_k} \cdot x_2^2 + \\ &\quad + \dots + \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k^2 c_k} \cdot x_k^2 \end{aligned}$$

Cho  $k$  chạy từ 1 đến  $n$ , rồi lấy tổng, ta được

$$x_1^2 + \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right)^2 \leq \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2$$

Trong đó

$$\alpha_k = \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_k}{k^2 c_k} + \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_{k+1}}{(k+1)^2 c_k} + \dots + \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n^2 c_k} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Ta chọn  $c_k = \sqrt{k} - \sqrt{k-1} \Rightarrow c_1 + c_2 + \dots + c_k = \sqrt{k}$

$$\Rightarrow \alpha_k = \frac{1}{c_k} \cdot \left( \frac{1}{k^{3/2}} + \frac{1}{(k+1)^{3/2}} + \frac{1}{n^{3/2}} \right)$$

Chú ý rằng

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}} &= \frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}} - \sqrt{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}} \\ &= \frac{1}{\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}} + \sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}} \\ &\geq \frac{1}{2k^{3/2}} \\ \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} &\geq \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{2k^{3/2}} + \frac{1}{2(k+1)^{3/2}} + \dots + \frac{1}{2n^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_k \leq \frac{2}{c_k \sqrt{k - \frac{1}{2}}} = \frac{2(\sqrt{k} + \sqrt{k-1})}{\sqrt{k - \frac{1}{2}}} \leq 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

### 3. Bài tập đề nghị.

#### Bài 1. (Vietnam TST 1994)

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực thỏa mãn điều kiện  $\frac{1}{2} \leq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a - 2b + c)^2 + (b - 2c + d)^2 + (b - 2a)^2 + (c - 2d)^2$$

#### Bài 2.

Cho  $x, y > 0$  và  $x + y \geq 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 2x + 3y + \frac{6}{x} + \frac{10}{y}$$

#### Bài 3.

Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + 2b + 3c \geq 20$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a + b + c + \frac{3}{a} + \frac{9}{2b} + \frac{4}{c}$$

#### Bài 4.

Cho  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2ab + 4bc + 3ca$$

#### Bài 5. (Toán Học Tuổi Trẻ 2005)

a) Cho tam giác  $ABC$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C$$

b) Cho tam giác  $ABC$ ,  $m, n, p$  là các số thực dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C$$



[Bài 6. \(VMEO 2004\)](#)

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = tgA + 2tgB + 5tgC$$

[Bài 7. \(VMEO 2005\)](#)

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương cho trước và  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $ax + by + cz = xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z$$

[Bài 8.](#)

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là  $n$  số thực dương cho trước và  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số thực dương thỏa mãn  $\sum_{i=1}^n a_i x_i = \prod_{i=1}^n x_i$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sum_{i=1}^n x_i$$

[Bài 9. \(Đề chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội 2005\)](#)

Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $xy + yz + zx = 7xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{8x^4 + 1}{x^2} + \frac{108y^5 + 1}{y^2} + \frac{16z^6 + 1}{z^2}$$

[Bài 10. \(Toán Học Tuổi Trẻ 2005\)](#)

Cho  $x, y, z \in [0, 1]$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$$

[Bài 11.](#)

Chúng minh rằng với mọi dãy số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < 2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

# PHƯƠNG PHÁP HE SOÁ BAÁT NINH

Trong thời cấp 2, khi nói lời giải của khâu nhiều bài toán nào biết là bất năng thời, tôi không thể hiểu nó tại sao người ta lại nghĩ ra một lời giải nào và tôi cảm thấy nó là một lời giải thiếu tự nhiên không tôi cũng cảm thấy vô cùng thanh phúc người nào nghĩ ra lời giải nào. Nhưng bây giờ khi nào tôi làm quen với tất cả các kiến thức toán số cấp, tôi mới hiểu một cái không phải là một cái gì mới lạ cái mà nó là một phương pháp hay hời. Trong bài này, tôi xin giới thiệu với các bạn một trong những phương pháp này "Phương pháp he soá baát ning". Phương pháp này tuy có một số hạn chế nhưng nó vẫn là một phương pháp hay và khá mạnh. Các bạn nên chú ý nhé nó vì ngoài việc giúp ta chứng minh một bất năng thời khi thì nó còn là "liều thuốc bổ" cho một phương pháp chứng minh bất năng thời cực mạnh: "Phương pháp phân tích bình phương S.O.S" vì nó giúp ta đưa một bất năng thời về dạng S.O.S nhanh chóng hơn các kiểu biến đổi thông thường.

Sau này là một số ví dụ

## Ví dụ 1. (USAMO 2003)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

*Nhập.*

Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Do hai vế của bất năng thời nào cho nên ta có thể chuẩn hóa cho  $a + b + c = 3$ . Khi đó bất năng thời cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8$$

Ta sẽ tìm số thực  $\alpha$  sao cho bất đẳng thức cho mọi  $a \in (0,3)$

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} \leq \alpha(a-1) + \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 3\alpha a^3 + (7-9\alpha)a^2 + (15\alpha-22)a + 15-9\alpha \geq 0$$

Ta cần tìm  $\alpha$  sao cho  $f(a) \geq 0 \forall a \in (0,3)$  và  $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ . Nếu coi  $\alpha$  là một biến, ta cần coi

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha + 2(7-9\alpha) + 15\alpha - 22 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

Vậy nhiệm vụ của ta bây giờ là xét xem bất đẳng thức sau có đúng hay không

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} \leq \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}$$

Với những lập luận như trên, ta nghĩ nên một lời giải không mấy tự nhiên như sau

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $a+b+c=3$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq 8$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} \leq \frac{4}{3}a + \frac{4}{3} \quad (*)$$

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow (a-1)^2(4a+3) \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Vậy (\*) đúng.

Tổng cộng, ta có

$$\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} \leq \frac{4}{3} \cdot b + \frac{4}{3}$$

$$\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq \frac{4}{3} \cdot c + \frac{4}{3}$$

Do ñoù

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \leq \frac{4}{3} \cdot (a+b+c) + 4 = 8$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

Rieäng ñoù với bài toán trên còn có một cách tìm  $\alpha$  cực nhanh là

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2} = \frac{1}{3} + \frac{8a+6}{3(a-1)^2+6} \leq \frac{1}{3} + \frac{8a+6}{6} = \frac{4}{3} \cdot a + \frac{4}{3}$$

Những với những loại này thì ta không làm mạnh bất đẳng thức hơn nữa. Thật vậy, tôi đã cố gắng rất nhiều để dùng những loại này để chứng minh bất đẳng thức sau những vẫn bất ổn

$$\frac{(a+3)^2}{4a^2+(3-a)^2} + \frac{(b+3)^2}{4b^2+(3-b)^2} + \frac{(c+3)^2}{4c^2+(3-c)^2} \leq 6$$

Với  $a, b, c > 0$  thỏa  $a+b+c=3$ .

Có thể thấy cách tìm  $\alpha$  ban đầu là cách tìm hay nhất, những nếu nói tới khái niệm tính toán bất ổn cho những bài toán không ổn tốt cho làm, và đôi khi biểu thức sẽ bài cho quá phức tạp (chẳng hạn như quá nhiều căn thức). Vì những lý do này tôi xin giới thiệu với các bạn một cách tìm  $\alpha$  khác qua việc trên bất đẳng thức AM-GM, cụ thể là nói với bài toán trên

Ta sẽ tìm  $\alpha, \beta$  sao cho bất đẳng thức sau đúng cho mọi số dương  $a, b, c$

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{\alpha a + \beta b + \beta c}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM (xin đừng lờ ý với các bài toán trong cách tìm này, ta không cần để ý đến chiều bất đẳng thức, tôi xin giới thiệu  $\rightarrow$  để thay

cho dấu bất đẳng thức và ta cũng không cần điều kiện  $\alpha, \beta$  âm hay dương vì đây chỉ là nhân tử), ta có

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \rightarrow \frac{8}{3} \cdot a^{\frac{1}{3}} \cdot (bc)^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{\alpha a + \beta b + \beta c}{a+b+c} \rightarrow \frac{\alpha + 2\beta}{3} \cdot a^{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta} - \frac{1}{3}} \cdot (bc)^{\frac{\beta}{\alpha+2\beta} - \frac{1}{3}}$$

Ta chọn  $\alpha, \beta$  sao cho 
$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 8 \\ \frac{\alpha}{\alpha + 2\beta} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ \frac{\beta}{\alpha + 2\beta} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{6} \end{cases} . \text{ Giải hệ này, ta được } \begin{cases} \alpha = \frac{16}{3} \\ \beta = \frac{4}{3} \end{cases} .$$

Vậy nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là xét tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq \frac{16a+4b+4c}{3(a+b+c)}$$

Ta có thể chuẩn hóa cho  $a+b+c=3$  rồi chứng minh tổng tối nhỏ trên, hoặc biến đổi tổng nhỏ.

### Ví dụ 2.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \geq 1$$

### Nhập.

Này là một bài toán hay, tổng nói thôi. Ta có thể giải bằng cách làm tổng tối nhỏ trên, xin danh cho các bạn. Ở đây, tôi xin giới thiệu một cách giải khác nhỏ sau

Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c$ .

Ta sẽ tìm  $p$  sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^p}{a^p + b^p + c^p}$$

Chúng ta coi 2 cách chọn  $p$  sau đây nào hợp hoặc đưa vào bất đẳng thức AM-GM, về phía trái, trái rất ngại tính toán nên chọn những trình bày cách đưa vào bất đẳng thức AM-GM, mong các bạn thông cảm.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta coi

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot a^{\frac{4}{3}} \cdot (bc)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{a^p}{a^p + b^p + c^p} \rightarrow \frac{1}{3} \cdot a^{\frac{2p}{3}} \cdot (bc)^{-\frac{p}{3}}$$

Tõ này, bằng cách đồng nhất hệ số ta suy ra những  $p = 2$ .

Vậy nhiệm vụ của chúng ta bây giờ là kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Với những lập luận như trên, ta chỉ cần lời giải như sau

*Lời giải.*

Ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (*)$$

Thật vậy:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^3 + (b+c)^3}} \geq \frac{\sqrt{a}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq a(a^3 + (b+c)^3)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2(b^2 + c^2) + (b^2 + c^2)^2 \geq a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)((a^2 + b^2) + (a^2 + c^2)) \geq a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)((a-b)^2 + (a-c)^2) + 2(b^2 + c^2)a(b+c) \geq a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2 + c^2)((a-b)^2 + (a-c)^2) + a(b+c)(b-c)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy (\*) đúng.

Tổng cộng, ta có

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} \geq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Do đó

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3}} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

\* Nhận xét 1.

Cả hai ví dụ trên đều sử dụng đẳng thức

$$1 = \frac{a^p + b^p + c^p}{a^p + b^p + c^p} = \frac{1}{\alpha + \beta} \cdot \frac{\alpha(a+b+c) + \beta(a+b+c)}{a+b+c}$$

Một câu hỏi đặt ra cho ta là khi nào thì ta phải tìm  $p$  và khi nào thì ta phải tìm  $\alpha, \beta$ ? Có lẽ các bạn sẽ hỏi lượng từng ô cho đây nhưng thật ra thì ta cần nhìn biểu thức ở bên trái và biết ngay thôi, chẳng hạn nhờ ô ví dụ 1, xét bất đẳng thức

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{8a^p}{a^p + b^p + c^p}$$

Khi cho  $a \rightarrow 0, b = c = 1$  thì ta có  $VT \rightarrow 1, VP \rightarrow 0$  nên bất đẳng thức này không thể đúng với mọi số dương  $a, b, c$ .

Ví dụ 3.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$$

Nhập.

Nhận xét rằng dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Ta sẽ tìm  $\alpha$  sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{2a^3}{a^2 + b^2} \geq \alpha a + (1 - \alpha)b$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{2a^3}{a^2 + b^2} &\rightarrow a^2 b^{-1} \\ \alpha a + (1 - \alpha)b &\rightarrow a^\alpha b^{1-\alpha} \end{aligned}$$

Tõ này, bằng cách chọn hệ số ta có  $\alpha = 2$ .

Vậy nhiệm vụ của ta bây giờ là kiểm chứng tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\frac{2a^3}{a^2 + b^2} \geq 2a - b$$

Ta sẽ nêu lời giải nhỏ sau

*Lời giải.*

Ta có

$$\frac{2a^3}{a^2 + b^2} \geq 2a - b \quad (*)$$

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow b(a - b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy (\*) đúng.

Tõng tõi, ta có  $\frac{2b^3}{b^2 + c^2} \geq 2b - c, \frac{2c^3}{c^2 + a^2} \geq 2c - a$

Do ñõ

$$\frac{2a^3}{a^2 + b^2} + \frac{2b^3}{b^2 + c^2} + \frac{2c^3}{c^2 + a^2} \geq a + b + c \text{ (ñpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

\* Nhận xét 2.



Bảng kinh nghiệm bản thân, tôi cho rằng nếu kiến cần nếu sử dụng phương pháp này với các bất đẳng thức thuần nhất là:

- 1) Dấu bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các biến số bằng các giá trị trong một tập hữu hạn nào đó (thông tập này chỉ gồm có 1 giá trị, tối đa là 2 giá trị).
- 2) Bất đẳng thức nếu bài cho là tổng của một dãy các biểu thức nào cũng nhau và tồn tại một cách chuẩn hóa nếu mỗi biểu thức chỉ còn phụ thuộc vào một biến số hoặc các biểu thức là hoán vị liên tiếp của nhau.

Bây giờ ta sẽ xét một số ví dụ về bất đẳng thức có nhiều kiến

**Ví dụ 4.**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3} \cdot (a + b + c) \geq 7$$

**Nhập.**

Nhận xét rằng bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Ta coi  $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a, b, c \in (0, \sqrt{3})$ .

Ta sẽ tìm  $\alpha$  sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $a \in (0, \sqrt{3})$

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot a \geq \alpha(a^2 - 1) + \frac{7}{3} \quad (*)$$

Ta coi

$$(*) \Leftrightarrow f(a) = 3\alpha a^3 - 4a^2 + (7 - 3\alpha)a - 3 \leq 0$$

Ta cần tìm  $\alpha$  sao cho  $f(a) \leq 0 \forall a \in (0, \sqrt{3})$  và  $f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$ . Nếu coi đó là

hiện nay ta cần coi

$$f'(1) = 0 \Leftrightarrow 9\alpha - 8 + 7 - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{6}$$

Bây giờ ta chỉ còn phải xét tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot a \geq \frac{1}{6} \cdot (a^2 - 1) + \frac{7}{3}$$

Ta ñi ñeán lòii giaáí nhö sau

*Lòii giaáí.*

Ta coi  $a^2 + b^2 + c^2 = 3 \Rightarrow a, b, c \in (0, \sqrt{3})$ .

Ta seé chöng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{4}{3} \cdot a \geq \frac{1}{6} \cdot (a^2 - 1) + \frac{7}{3} \quad (**)$$

Thaá vạy

$$(**) \Leftrightarrow (a-1)^2(6-a) \geq 0 \quad (\text{ñuöng do } \sqrt{3} > a > 0)$$

Vạy (\*\*) ñuöng.

Töông töi, ta coi

$$\frac{1}{b} + \frac{4}{3} \cdot b \geq \frac{1}{6} \cdot (b^2 - 1) + \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{c} + \frac{4}{3} \cdot c \geq \frac{1}{6} \cdot (c^2 - 1) + \frac{7}{3}$$

Do ñöi

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{4}{3} \cdot (a+b+c) \geq \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - 3) + 7$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

Ñaáng thöic xay ra khi vaá chæ khi  $a = b = c = 1$ .

Xin ñöüc löu yivöi caác baán rang khöng pháii lúc naó ta cuöng löä chöi ham laá những ham tuyeán tính hoác ham luyé thöä khöng thöái, maá ñöái lúc ta caán pháii löä chöi ham pháii thöic, ham caán, ... Ví dụi sau seé cho chung ta thaáy roö ñieäu ñöi

**Ví dụi 5. (APMO 2005)**

Cho  $a, b, c > 0$  thoá  $abc = 8$ . Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{2}{2+x^2} \quad \forall x > 0 \quad (*)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (2+x^2)^2 \geq 4(1+x^3) \\ &\Leftrightarrow x^2(x-2)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy (\*) đúng.

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} = \frac{2S(a,b,c)}{36+S(a,b,c)} = \frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}}$$

trong đó  $S(a,b,c) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Theo bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 12 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\geq 3\sqrt[3]{(abc)^4} = 48 \\ \Rightarrow S(a,b,c) &\geq 72 \end{aligned}$$

Do đó

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \geq \frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}} \geq \frac{2}{1+\frac{36}{72}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 2$ .

## BAI TAP.

### Bai 1. (IMO 2001)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1$$

### Bai 2.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

### Bai 3.

Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{(a^2 + b^2)(a + b)} + \frac{b^4}{(b^2 + c^2)(b + c)} + \frac{c^4}{(c^2 + d^2)(c + d)} + \frac{d^4}{(d^2 + a^2)(d + a)} \geq \frac{a + b + c + d}{4}$$

### Bai 4.

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa  $a + b + c + d = 1$ . Chứng minh rằng

$$6(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \frac{1}{8}$$

### Bai 5. (VoiQuoc BaiCan)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(b + c - a)^2}{2a^2 + (b + c)^2} + \frac{(c + a - b)^2}{2b^2 + (c + a)^2} + \frac{(a + b - c)^2}{2c^2 + (a + b)^2} \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a + b + c)^2}$$

### Bai 6.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{11b^3 - a^3}{ab + 4b^2} + \frac{11c^3 - b^3}{bc + 4c^2} + \frac{11a^3 - c^3}{ca + 4a^2}$$

### Bài 7.

Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + 63bcd}} + \frac{b}{\sqrt[3]{b^3 + 63cda}} + \frac{c}{\sqrt[3]{c^3 + 63dab}} + \frac{d}{\sqrt[3]{d^3 + 63abc}} \geq 1$$

### Bài 8.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^3 + b^3 + c^3 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{5}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{27}{4}$$

### Bài 9.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-3c)^2}{(a+b)^2 + 2c^2} + \frac{(b+c-3a)^2}{(b+c)^2 + 2a^2} + \frac{(c+a-3b)^2}{(c+a)^2 + 2b^2} \geq \frac{1}{2}$$

### Bài 10.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(3a+b+c)^3}{(b+c)^3 + 3a^3} + \frac{(3b+c+a)^3}{(c+a)^3 + 3b^3} + \frac{(3c+a+b)^3}{(a+b)^3 + 3c^3} \leq \frac{375}{11}$$

### Bài 11.

Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

### Bài 12.

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $x + y + z = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}$$

Bài 13.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3 + \left(\frac{b}{c+a}\right)^3 + \left(\frac{c}{a+b}\right)^3 \geq \frac{3}{8}$$

Bài 14. (Moldova 2005)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^4 + b^4 + c^4 = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{4-ab} + \frac{1}{4-bc} + \frac{1}{4-ca} \leq 1$$

Bài 15.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2 + 3c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2 + 3a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2 + 3b^2} \geq \frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{7(a+b+c)^2}$$

Bài 16.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b-c)^2}{7(a+b)^2 + 17c^2} + \frac{(b+c-a)^2}{7(b+c)^2 + 17a^2} + \frac{(c+a-b)^2}{7(c+a)^2 + 17b^2} \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5(a+b+c)^2}$$

Bài 17.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} \leq a+b+c$$

Bài 18.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a+b+c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 19. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} + \frac{1}{c^2 + 1} + \frac{1}{d^2 + 1} \geq 2$$

**Bài 20.**

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $a + b + c + d = 4$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{5 + 3a^2} + \frac{b}{5 + 3b^2} + \frac{c}{5 + 3c^2} + \frac{d}{5 + 3d^2} \leq \frac{1}{2}$$

**Bài 21. (Olympic 30 - 4 - 2006)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^4 + \sqrt[3]{(a^6 + b^6)(a^3 + c^3)^2}} + \frac{b^4}{b^4 + \sqrt[3]{(b^6 + c^6)(b^3 + a^3)^2}} + \frac{c^4}{c^4 + \sqrt[3]{(c^6 + a^6)(c^3 + b^3)^2}} \leq 1$$

**Bài 22. (Japan 1997)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2 + (b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2 + (c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2 + (a+b)^2} \geq \frac{3}{5}$$

**Bài 23. (Phạm Văn Thuận)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{a^3 + (b+c)^3} + \frac{b^3}{b^3 + (c+a)^3} + \frac{c^3}{c^3 + (a+b)^3} \geq \frac{1}{3}$$

**Bài 22.**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 2(b+c)^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 2(c+a)^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 2(a+b)^2}} \geq 1$$

**Bài 23. (Phạm Kim Hùng, Vô Địch Bài Cẩn)**

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $a + b + c + d = 4$  và  $k \geq 2$ . Chứng minh rằng

$$(a^{k+1} + 1)(b^{k+1} + 1)(c^{k+1} + 1)(d^{k+1} + 1) \geq (a^k + 1)(b^k + 1)(c^k + 1)(d^k + 1)$$

Bài 24.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a+1}{c(2-b)} + \frac{b+1}{a(2-c)} + \frac{c+1}{b(2-a)} \geq \frac{36}{5}$$

Bài 25. (Romania 2005)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

Bài 26. (Phạm Văn Thuận)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c \geq 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 + b + c} + \frac{1}{b^2 + c + a} + \frac{1}{c^2 + a + b} \leq 1$$



# PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG S.O.S

## A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP.

### I. Bài toán mở đầu và định lý.

Thông thường, khi đứng trước một bài toán quen biết, cách chúng ta thường bắt đầu để giải quyết không phải là thử mò mẫm các bất đẳng thức đã biết, không phải là tìm ngay một cách dồn biến nào đó mà thông thường nhất là đưa về các dạng bình phương. Điều này dựa trên tính chất cơ bản nhất của số thực “ $x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$ ”. Có rất nhiều bài toán, cho dù bạn chủ động hay vô tình, đều đã sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Tuy nhiên, rất có thể những điều bạn sắp đọc được trong mục này sẽ làm bạn thực sự ngạc nhiên...

Chúng ta sẽ mở đầu với bất đẳng thức AM-GM, đây có thể coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Nhưng chúng ta chỉ tìm hiểu bất đẳng thức này trong trường hợp  $n$  rất nhỏ. Với  $n = 2$  chẳng hạn, ta có bất đẳng thức

**Ví dụ 1.** Với mọi  $a, b \geq 0$ , ta có bất đẳng thức  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .

Sẽ không có nhiều điều cần phải bàn tới ở bất đẳng thức trên, ngay khi các bạn học về số thực thì việc chứng minh bất đẳng thức đó quá dễ. Bất đẳng thức tương đương với  $(a - b)^2 \geq 0$  một điều quá hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta xét tiếp khi  $n = 3$  và bất đẳng thức sau đây

**Ví dụ 2.** Với mọi  $a, b, c \geq 0$ , ta có bất đẳng thức  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ .

Khi hỏi về một cách chứng minh thật cụ thể cho bất đẳng thức này, chúng ta sẽ cảm thấy có một chút bối rối! Tất nhiên, bất đẳng thức trên không khó, lời giải chỉ trong duy nhất một dòng...

$$VT - VP = \frac{1}{2} \cdot (a + b + c)((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$$

Và chắc chắn đây là cách làm thông minh nhất, vì chúng ta không phải qua một bước trung gian nào cả. Cả hai ví dụ trên đều được chứng minh bằng phương pháp

phân tích bình phương nhưng theo một nghĩa tương đối hẹp. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức “cao cấp”, thậm chí bạn không cần biết bất kỳ một định lý nào về bất đẳng thức cả. Ngoài ra, nó còn là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của chúng ta.

Nếu đọc kỹ các bài toán ở chương trước, các bạn đã gặp không ít những bài toán sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Còn bây giờ, chúng ta sẽ khái quát hóa cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp cực kỳ hiệu quả.

Bài toán quan trọng mà chúng ta phải xét đến trong mục này là một bất đẳng thức nổi tiếng đã được giới thiệu ở chương trước, bất đẳng thức Iran 96.

### **Bài toán 1. (Iran 96)**

Với mọi số thực  $a, b, c$  không âm, ta có

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Đây cũng là bài toán có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt. Ngoài ra, nó còn là một bất đẳng thức rất khó khi bạn chưa được tiếp cận trước đó. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy xem lại bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 2005 và tìm một chứng minh thật tự nhiên cho nó.

### **Ví dụ 3. (IMO 2005)**

$x, y, z$  là các số thực dương thỏa  $xyz \geq 1$ . Chứng minh

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

### **Chứng minh.**

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét trường hợp  $xyz = 1$  là đủ (các bạn hãy tự tìm hiểu lý do tại sao nhé!). Khi đó, ta có

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x^5 - x^2 \cdot xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + (y^2 + z^2)yz} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}$$

Đặt  $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ . Khi đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b) \left( \frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (c+a)^2} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \cdot \frac{c^2 + ac + bc + a^2 + b^2 - ab}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (c+a)^2)} &\geq 0 \text{ (ñung)} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

Chứng minh trên không phải là cách duy nhất, có thể còn nhiều chứng minh độc đáo hơn. Nhưng nếu xem xét khách quan thì chứng minh trên hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói khái quát, khi đứng trước một bất đẳng thức bất kỳ ba biến  $a, b, c$  ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng các bình phương ký hiệu

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu bạn đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu bạn chưa quen, thì các thác mắc sẽ được giải quyết trong mục “Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kỹ thuật phân tích”.

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó, các hệ số  $S_a, S_b, S_c$  đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kỹ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn, S.O.S giúp chúng ta giải quyết các trường hợp mà theo quan niệm cũ là không thể áp dụng được “có một hệ số trong  $S_a, S_b, S_c$  không dương”.

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử  $a \geq b \geq c$ . Với các bài toán hoán vị thì phải xét thêm trường hợp  $a \leq b \leq c$ . Trong trường hợp  $a \geq b \geq c$ , ta có các nhận xét sau

1. Nếu  $S_b \geq 0$ , do  $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$  nên

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2$$

và phần còn lại của bài toán là chứng minh  $S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0$ . Nhưng hai bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm với các bình phương  $(a-b)^2, (b-c)^2, (c-a)^2$ .

2. Nếu  $S_b \leq 0$ , do  $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$  nên

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2$$

cũng vậy, việc chứng minh còn lại  $S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$ . sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Trong nhiều trường hợp, ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là

$$a-c \geq \frac{a}{b} \cdot (b-c) \quad (a \geq b \geq c)$$

Chẳng hạn khi ta có  $S_b, S_c \geq 0$  thì

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 \geq S_a(b-c)^2 + S_b \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot (b-c)^2 = \frac{(b-c)^2}{b^2} \cdot (a^2 S_b + b^2 S_a)$$

và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu  $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ .

Ta có thể tóm tắt các kết quả trên thành định lý như sau

### **Định lý S.O.S.**

Xét biểu thức

$$S = f(a, b, c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$$

trong đó  $S_a, S_b, S_c$  là các hàm số theo  $a, b, c$ .

1. Nếu  $S_a, S_b, S_c \geq 0$  thì  $S \geq 0$ .
2. Nếu  $a \geq b \geq c$  và  $S_b, S_a + S_b \geq 0, S_b + S_c \geq 0$  thì  $S \geq 0$ .
3. Nếu  $a \geq b \geq c$  và  $S_a, S_c, S_a + 2S_b \geq 0, S_c + 2S_b \geq 0$  thì  $S \geq 0$ .
4. Nếu  $a \geq b \geq c$  và  $S_b, S_c, a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$  thì  $S \geq 0$ .
5. Nếu  $S_a + S_b + S_c \geq 0$  và  $S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a \geq 0$  thì  $S \geq 0$ .

Ngoài ra, để  $S \geq 0$  với mọi  $a, b, c$  thì ta phải có

$$S_a + S_b|_{a=b} \geq 0, S_b + S_c|_{b=c} \geq 0, S_c + S_a|_{c=a} \geq 0.$$

Trong đó,  $S_a + S_b|_{a=b}$  có nghĩa là ta xét biểu thức  $S_a + S_b$  khi  $a = b$ . Với các bài toán đối xứng, ta có ngay  $S_a = S_b$  khi  $a = b$ . Nhận xét này rất quan trọng trong các bài toán tìm hằng số tốt nhất.

Dường như định lý này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế S.O.S đã làm được điều này và đây là một điều rất ngạc nhiên.

Một câu hỏi nữa đặt ra là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy? Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng  $f(a, b, c)$  thỏa mãn điều kiện  $f(a, a, a) = 0$  và  $f$  có thể chứa căn thức, phân thức của  $a, b, c$  luôn luôn có biểu diễn ấy. Chứng minh điều này bạn xem trong phần tiếp theo.

Bây giờ là một số ví dụ cụ thể để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp này, và nếu có thể thì trước tiên bạn hãy thử chứng minh chúng theo cách khác.

#### Ví dụ 4.

Chứng minh rằng với mọi số thực không âm  $a, b, c$  ta luôn có

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

#### Chứng minh.

Ta chú ý đến hai đẳng thức sau đây

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} \cdot ((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a) - 8abc = c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2$$

Như thế sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng vế trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{2c(a-b)^2 + 2a(b-c)^2 + 2b(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta tìm được

$$S_a = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab + bc + ca} - 2a = b + c - a - \frac{abc}{ab + bc + ca}$$

$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = c+a-b - \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c - \frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Do tính đối xứng nên có thể giả sử  $a \geq b \geq c$ , khi đó dễ thấy  $S_b, S_c \geq 0$ . Dựa vào tiêu chuẩn thứ nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng  $S_a + S_b \geq 0$  là xong. Nhưng điều này rất hiển nhiên vì

$$S_a + S_b = 2c - \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \geq 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức Iran 96.

#### Ví dụ 5. (Iran TST 1996)

Với mọi số thực  $x, y, z$  không âm, ta có

$$(xy + yz + zx) \left( \frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

#### Chứng minh.

Đặt  $a = x + y, b = y + z, c = z + x$ . Ta phải chứng minh

$$(2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2) \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có thể chuyển bất đẳng thức về dạng

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2} \right) \geq 0$$

$$S_a = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}$$

$$S_b = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2}$$

$$S_c = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

Giả sử rằng  $a \geq b \geq c$  thì  $S_a, S_b \geq 0$ . Sử dụng tiêu chuẩn 4, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} b^2 S_b + c^2 S_c &\geq 0 \\ \Leftrightarrow b^3 + c^3 &\geq abc \end{aligned}$$

nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì  $a \leq b + c \Rightarrow b^3 + c^3 \geq bc(b + c) \geq abc$ .

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  hoặc các hoán vị tương ứng.

Có một vài chứng minh khác cho bất đẳng thức Iran 96, cách thông thường chúng ta biết là khai triển và sử dụng bất đẳng thức Schur (hoặc dùng định lý Muirhead), hoặc dùng đa thức đối xứng. Tuy nhiên, bạn đọc sẽ đồng ý với tôi rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng. Việc biết sử dụng phương pháp S.O.S đã làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều, đây thực sự là một lời giải đẹp và ngắn gọn, thỏa mãn được mỹ quan toán học của nhiều người.

Phương pháp phân tích bình phương đã từng xuất hiện theo cách này hay cách khác trong một số bất đẳng thức, vì nó là một hướng suy nghĩ rất tự nhiên đối với bất đẳng thức. Nhưng chắc chắn đây sẽ là lần đầu tiên mà phương pháp này được hệ thống và được coi là phương pháp chính thống cho chúng ta. Nó đem lại cho chúng ta một cách nhìn chủ động và vô cùng hiệu quả đối với các bài toán mà chỉ một thời gian ngắn trước còn là những bài toán vô cùng khó khăn. Bất đẳng thức Iran 96 được coi là bài toán cơ bản ứng dụng phương pháp này (mặc dù tác giả nghĩ đến S.O.S từ một bất đẳng thức cũ hơn). S.O.S là tên lấy từ chữ cái đầu tiên của cụm từ Sum of Square.

## II. Biểu diễn cơ sở phương pháp S.O.S.

### 1. Mở đầu.

Trong các bài toán được dẫn ra ở các mục trước hẳn các bạn đã nhận thấy sự lặp đi lặp lại của biểu thức dạng  $F(a, b, c) = S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2$ . Các định lý sau đây sẽ cho thấy sự tồn tại của biểu diễn đó. Chúng tôi tự giới hạn mình trong các lớp bất đẳng thức 3 biến đối xứng, tuy nhiên điều đó sẽ không làm hạn chế tầm

ứng dụng của phương pháp này. Các bạn có thể sử dụng các ví dụ để kiểm chứng rằng với cùng tư tưởng dưới đây, hầu hết các bất đẳng thức hoán vị ba biến cũng có những biểu diễn tương tự. Chúc các bạn may mắn!

## 2. Các khái niệm cơ bản.

### 2.1. Tập xác định (TXĐ).

Từ đây trở đi nếu không có gì thay đổi, để cho bài toán rõ ràng và tránh những phiền phức không đáng có, TXĐ của tất cả các hàm số và bất đẳng thức sẽ giới hạn trong tập số thực  $\mathbf{R}_+^3$ , hơn nữa, đôi khi để hợp lý chúng ta sẽ bỏ đi điểm  $(0,0,0)$ .

### 2.2. Định nghĩa 1: Hàm đối xứng ba biến.

Một hàm phân thức ba biến  $F(a,b,c)$  được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau  $F(a,b,c) = F(x,y,z)$  đúng với mọi hoán vị  $(x,y,z)$  của  $(a,b,c)$ . Hơn nữa nếu với mọi số thực dương  $x$  mà  $F(x,x,x) = 0$  thì  $F(a,b,c)$  được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.

### 2.3. Định nghĩa 2: Hàm nửa đối xứng ba biến.

Một hàm phân thức ba biến  $G(a,b,c)$  được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau  $G(a,b,c) = G(a,c,b)$  đúng với mọi bộ ba số thực dương  $(a,b,c)$ . Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương  $x,y$  mà  $G(x,y,y) = 0$  thì  $G(a,b,c)$  được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.

## 3. Các định lý cơ sở.

### 3.1. Định lý 1: Cơ sở của phương pháp S.O.S.

Giả sử  $F(a,b,c)$  là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn, thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng  $G(a,b,c)$  sao cho đồng nhất thức sau đúng

$$F(a,b,c) = G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2$$

Trước khi đưa ra một chứng minh của định lý này dựa trên một số hiểu biết đơn giản về không gian vectơ chúng tôi muốn nhấn mạnh với các bạn rằng định lý trên là đủ để áp dụng đối với tất cả các hàm phân thức đối xứng ba biến. Bởi vì định lý 1 hạn chế trong các lớp đa thức ba biến nên có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa



thức ba biến  $a, b, c$  sẽ chứa (và chỉ chứa!) các hạng tử  $t_{m,n,p} a^m b^n c^p$  trong đó  $m, n, p$  là các số nguyên không âm.

### **Chứng minh định lý 1.**

Ta chứng minh định lý 1 cho lớp các đa thức bậc  $n$ . Ký hiệu  $S(F)$  là tập hợp tất cả các đa thức ba biến  $F(a, b, c)$  đối xứng chuẩn bậc  $n$ ,  $S(Q)$  là tập hợp tất cả các đa thức  $G(a, b, c)$  đối xứng ba biến chuẩn bậc  $n$  dạng

$$G(a, b, c) = G(a, b, c)(b - c)^2 + G(b, c, a)(c - a)^2 + G(c, a, b)(a - b)^2$$

ở đây  $G(a, b, c)$  là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc  $n - 2$  (ta xét  $n \geq 2$  vì với  $n = 1$  thì định lý hiển nhiên đúng).

Rõ ràng  $S(Q)$  là không gian vector con của không gian vector  $F(a, b, c)$ . Và do đó, số chiều của  $S(Q)$  không vượt quá số chiều của  $S(F)$ . (\*)

Với các số nguyên không âm  $\alpha, \beta, \gamma$  xét các đa thức đặc biệt sau đây

$$(i) F_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c) = \sum_{sym} a^\alpha b^\beta c^\gamma$$

$$(ii) G_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c) = a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$$

$$(iii) Q_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c) = G_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c)(b - c)^2 + G_{\alpha, \beta, \gamma}(b, c, a)(c - a)^2 + G_{\alpha, \beta, \gamma}(c, a, b)(a - b)^2$$

Ký hiệu  $f_n$  là tập hợp tất cả các bộ số  $(\alpha, \beta, \gamma)$  thỏa mãn các điều kiện

$$\alpha + \beta + \gamma = n, \alpha \geq \beta \geq \gamma.$$

Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức  $F_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c)$  với  $(\alpha, \beta, \gamma) \in f_n$  là hệ sinh độc lập tuyến tính của  $S(F)$  do đó số chiều của  $S(F)$  bằng số phần tử của  $f_n$ . (1)

Ký hiệu  $q_n$  là tập hợp tất cả các bộ số  $(\alpha, \beta, \gamma)$  thỏa mãn các điều kiện

$$\alpha + \beta + \gamma = n - 2, \alpha + 2 \geq \beta \geq \gamma.$$

Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức  $G_{\alpha, \beta, \gamma}(a, b, c)$  với  $(\alpha, \beta, \gamma) \in q_n$  là hệ vector độc lập tuyến tính của  $S(Q)$  do đó số chiều của  $S(Q)$  không nhỏ hơn số phần tử của

$$q_n. \quad (2)$$

Từ các kết quả (1), (2) với chú ý là  $f_n$  và  $q_n$  có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của  $S(Q)$  không nhỏ hơn số chiều của  $S(F)$ . (\*\*)

Vậy từ các kết quả (\*), (\*\*) suy ra số chiều của hai không gian  $S(Q)$ ,  $S(F)$  là bằng nhau, từ đó suy ra mọi phần tử của không gian  $S(F)$  đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian  $S(Q)$ . Đây là kết quả cần phải chứng minh.

Từ định lý này có thể nhận thấy một thuật toán tìm biểu diễn cơ sở, đó là tìm ma trận chuyển giữa hai không gian vector  $S(Q)$  và  $S(F)$ . Dưới đây là một thuật toán sơ cấp hơn.

### 3.2 Định lý 2: Thuật toán tìm biểu diễn cơ sở.

Giả sử  $M(a,b,c), N(a,b,c)$  là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương  $x$  thì phân số  $\frac{M(x,x,x)}{N(x,x,x)}$  là một hằng số  $t$ . Khi đó tồn tại hàm số nửa

đối xứng ba biến  $G(a,b,c)$  sao cho đồng nhất thức sau đúng

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} + \frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)} + \frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)} - 3t \\ &= G(a,b,c)(b-c)^2 + G(b,c,a)(c-a)^2 + G(c,a,b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

#### Chứng minh định lý 2.

Đối với hàm nửa đối xứng  $G(a,b,c)$  chúng ta tiến hành ghép cặp các hạng tử nửa đối xứng  $a^m b^n c^p + a^m b^p c^n$ . Sau đó, nhóm tất cả các hạng tử có cùng bậc vào một nhóm. Bộ số  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  với  $n_1 > n_2 > \dots > n_k$  gồm tất cả các giá trị bậc của đa thức đó sắp theo thứ tự giảm dần gọi là bộ chỉ thị cho đa thức đó. Khi đó, ta có thể viết

$$G(a,b,c) = \sum_{i=1}^k \sum_{m+n+p=n_i, n \geq p} g_{m,n,p} \cdot a^m (b^n c^p + b^p c^n)$$

Rõ ràng điều kiện  $\frac{M(x,x,x)}{N(x,x,x)}$  là một hằng số với mọi số thực dương  $x$  tương đương

với sự kiện bộ chỉ thị của các đa thức  $M(a,b,c), N(a,b,c)$  là giống nhau. Và do đó ta xét hiệu

$$\frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)} - t = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{m+n+p=n_i, n \geq p} \alpha_{m,n,p} \cdot a^m (b^n c^p + b^p c^n)}{N(a,b,c)}$$

trong đó,  $\alpha_{m,n,p} = m_{m,n,p} - t n_{m,n,p}$  và do đó  $\sum_{m+n+p=n_i, n \geq p} \alpha_{m,n,p} = 0, \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

Bây giờ đối với mỗi tổng bên trong tương ứng với mỗi giá trị  $n_i$  của tử số chúng ta tiến hành sắp xếp lại thứ tự các hạng tử trong tử số của phân số trên sau đó sẽ dùng một biến đổi nhỏ để làm xuất hiện các nhân tử  $a-b, b-c, c-a$ .

Trước hết ta chia các nghiệm nguyên không âm  $(m, n, p)$  thỏa mãn  $n \geq p$  của phương trình  $m+n+p=n_i$  thành  $n_i$  nhóm theo các giá trị  $m$ . Sắp xếp lại thứ tự các nhóm theo độ giảm dần của  $m$ . Trong mỗi nhóm thì giá trị của  $m$  là cố định, ta sắp xếp lại các nghiệm nguyên không âm của phương trình  $n+p=n_i-m$  theo độ giảm dần của  $n$  nếu  $n_i-m$  lẻ và theo độ tăng dần của  $n$  nếu  $n_i-m$  chẵn. Sau khi đã sắp thứ tự xong, chúng ta có một thứ tự mới của các tập nghiệm ban đầu, mà ta sẽ ký hiệu là  $\{(m_j, n_j, p_j) \mid j=1, 2, \dots, l\}$ , ở đây  $l$  là một hàm số phụ thuộc  $n_i$ . Để đơn giản ta ký hiệu

$$a_j = a^{m_j} (b^{n_j} c^{p_j} + b^{p_j} c^{n_j}), \quad b_j = a_{m_j, n_j, p_j}$$

Khi đó mẫu số có thể viết lại một cách đơn giản là

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_l b_l &= \\ &= (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3) (b_1 + b_2) + \dots + (a_{l-1} - a_l) (b_1 + b_2 + \dots + b_l). \end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện  $b_1 + b_2 + \dots + b_l = 0$  và chia các hiệu  $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \dots, a_{l-1} - a_l$  vào ba loại sau

$$(i) \quad a^m (b^{n+1} c^p + b^p c^{n+1}) - a^m (b^n c^{p+1} + b^{p+1} c^n) = a^m b^n c^p \cdot \frac{b^{n-p} - c^{n-p}}{b-c} \cdot (b-c)^2$$

$$(ii) \quad a^{m+1} (b^n c^n + b^n c^n) - a^m (b^{n+1} c^n + b^n c^{n+1}) = a^m b^n c^n [(a-b) - (c-a)]$$

Xét biểu thức

$$\frac{a^m b^n c^n [(a-b) - (c-a)]}{N(a,b,c)} + \frac{b^m c^n a^n [(b-c) - (a-b)]}{N(b,c,a)} + \frac{c^m a^n b^n [(c-b) - (b-c)]}{N(c,a,b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử  $a-b, b-c, c-a$ . Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^n b^n c^n \left[ \frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)} \right] = (a-b)^2 \cdot G(c,a,b)$$

trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^n a^n b^n}{N(a,b,c) \cdot N(b,c,a)} \cdot \frac{a^{m-n} \cdot N(b,c,a) - b^{m-n} \cdot N(a,b,c)}{a-b}$$

ở đây, ta đã sử dụng  $N(b,c,a) = N(b,a,c)$ . Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến  $a,b,c$  và đối xứng hai biến  $a,b$  nên  $G(c,a,b)$  là hàm nửa đối xứng ba biến.

$$(iii) \ a^{m+1}(b^{n+1}c^n + b^n c^{n+1}) - a^m(b^{n+1}c^{n+1} + b^{n+1}c^{n+1}) = a^m b^n c^n [c(a-b) - b(c-a)]$$

Xét biểu thức

$$\begin{aligned} & \frac{a^m b^n c^n [c(a-b) - b(c-a)]}{N(a,b,c)} + \frac{b^m c^n a^n [a(b-c) - c(a-b)]}{N(b,c,a)} + \\ & \quad + \frac{c^m a^n b^n [b(c-a) - a(b-c)]}{N(c,a,b)} \end{aligned}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử  $a-b, b-c, c-a$ . Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^n b^n c^{n+1} \left[ \frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)} \right] = (a-b)^2 \cdot G(c,a,b)$$

trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^{n+1} a^n b^n}{N(a,b,c) \cdot N(b,c,a)} \cdot \frac{a^{m-n} \cdot N(b,c,a) - b^{m-n} \cdot N(a,b,c)}{a-b}$$

ở đây ta đã sử dụng  $N(b,c,a) = N(b,a,c)$ . Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến  $a,b,c$  và đối xứng hai biến  $a,b$  nên  $G(c,a,b)$  là hàm nửa đối xứng ba biến.

Vậy trong cả ba trường hợp ta đều chỉ ra cách biến đổi thích hợp để đưa biểu thức về dạng biểu diễn cần thiết. Điều này hoàn thành việc chứng minh định lý 2. Niềm tin về sự tồn tại biểu diễn cơ sở đã được khẳng định.

## B. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG.

### I. Bài tập có lời giải.

#### Bài 1.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $\min\{a, b, c\} \geq \frac{1}{4} \cdot \max\{a, b, c\}$ . Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \cdot \left( \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \right)$$

#### Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử  $c \geq b \geq a \geq \frac{1}{4} \cdot c > 0$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác}$$

Do  $c \geq b \geq a \geq \frac{1}{4} \cdot c$  nên  $x \geq y \geq z > 0$  và  $4(-x+y+z) \geq x+y-z \Rightarrow 3y+5z \geq 5x$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{1}{16} \cdot \left( \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{z^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9 + \frac{1}{4} \cdot \left( \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{z^2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left( \frac{2}{xy} - \frac{5}{4z^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Đặt } S_x = \frac{2}{yz} - \frac{5}{4x^2}, S_y = \frac{2}{zx} - \frac{5}{4y^2}, S_z = \frac{2}{xy} - \frac{5}{4z^2}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Do  $x \geq y \geq z > 0$  và  $3y+5z \geq 5x$  nên  $S_x > 0$  và  $8y \geq 5x \Rightarrow S_y \geq 0$

Ta chứng minh

$$y^2 S_y + z^2 S_z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y^2}{xz} + \frac{2z^2}{xy} \geq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(y^3 + z^3) \geq 5xyz$$

Mà  $3y + 5z \geq 5x$  nên ta chỉ cần chứng minh

$$4(y^3 + z^3) \geq (3y + 5z)yz$$

$$\Leftrightarrow (y - z)(4y^2 + yz - 4z^2) \geq 0 \text{ (hàng)}$$

Ta có  $x - z \geq \frac{y}{z} \cdot (x - y) \geq 0$ .

Do đó

$$S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \geq S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2$$

$$\geq S_y \cdot \frac{y^2}{z^2} \cdot (x - y)^2 + S_z(x - y)^2$$

$$= \frac{(x - y)^2 (y^2 S_y + z^2 S_z)}{z^2}$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$  hoặc  $y = z = \frac{5}{8}x$ .

## Bài 2. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

**Chứng minh.**

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \left( 3 - \frac{2}{1-ab} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{1-3ab}{1-ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2-6ab}{1-ab} \geq 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2(a^2 + b^2 + c^2) - 6ab}{1 - ab} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{1-ab} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{c^2 - a^2}{1-ab} - \sum_{cyc} \frac{b^2 - c^2}{1-ab} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{1-bc} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{1-ca} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} - \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b)c}{(1-bc)(1-ca)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(3-4ac-4bc+a^2bc+ab^2c+3abc^2) \geq 0
\end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = 3 - 4ab - 4ac + ab^2c + abc^2 + 3a^2bc$$

$$S_b = 3 - 4ab - 4bc + a^2bc + abc^2 + 3ab^2c$$

$$S_c = 3 - 4bc - 4ac + ab^2c + a^2bc + 3abc^2$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned}
S_a &> 3 - 4ab - 4ac \\
&= 3(a^2 + b^2 + c^2) - 4ab - 4ac \\
&= 3\left(\frac{a^2}{2} + b^2\right) + 3\left(\frac{a^2}{2} + c^2\right) - 4ab - 4ac \\
&\geq 3\sqrt{2}ab + 3\sqrt{2}ac - 4ab - 4ac \\
&> 0
\end{aligned}$$

Do đó  $S_a > 0$

Tương tự  $S_b > 0, S_c > 0$

$$\Rightarrow S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 3. (Vietnam Team Selection Test 2006)

Cho  $x, y, z \in [1, 2]$ . Chứng minh

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \sum_{cyc} \frac{x}{y+z} \right)$$

**Chứng minh.**

Ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} & \frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz} - 9 \geq 3 \sum_{cyc} \left( \frac{2x}{y+z} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{z(x-y)^2}{xyz} \geq 3 \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{z^2 + xz + yz - 2xy}{xy(x+z)(y+z)} \cdot (x-y)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(z^2 + xz + yz - 2xy)z(x+y)}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)} \cdot (x-y)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (z^3x + z^3y + 2xyz^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xy^2z)(x-y)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} S_x &= x^3y + x^3z + 2x^2yz + x^2y^2 + x^2z^2 - 2xy^2z - 2xyz^2 \\ S_y &= y^3x + y^3z + 2xy^2z + x^2y^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xyz^2 \\ S_z &= z^3x + z^3y + 2xyz^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xy^2z \end{aligned}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng trở thành

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z$ .

Do  $x, y, z \in [1, 2]$  nên  $y+z \geq x \geq y \geq z \geq \frac{x}{2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} S_x &= x^3y + x^3z + 2x^2yz + x^2y^2 + x^2z^2 - 2xy^2z - 2xyz^2 \\ &= x^3y + x^3z + x(y+z)(xy+xz-2yz) \\ &> 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
S_y &= y^3x + y^3z + 2xy^2z + x^2y^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xyz^2 \\
&= y(z+x)(y^2 + xy + yz - 2zx) \\
&\geq y(z+x)(z^2 + xz + z^2 - 2zx) \\
&= yz(z+x)(2z-x) \\
&\geq 0 \\
S_y + S_z &= x(y^3 + z^3) + yz(y+z)^2 + x^2(y-z)^2 - 2x^2yz \\
&\geq xyz(y+z) + yz(y+z)^2 - 2x^2yz \\
&\geq x^2yz + x^2yz - 2x^2yz \\
&= 0
\end{aligned}$$

Do đó theo tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(x, y, z) = (t, t, t), (2, 1, 1)$  ( $t \in [1, 2]$ ).

#### Bài 4.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca}{8a^2+bc} \geq 1$$

#### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \left( \frac{ab+bc+ca}{8a^2+bc} - \frac{bc}{ab+bc+ca} \right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(ab+bc+ca)^2 - bc(8a^2+bc)}{8a^2+bc} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - 6a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2}{8a^2+bc} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2(b-c)^2}{8a^2+bc} + 2abc \sum_{cyc} \frac{b+c-2a}{8a^2+bc} \geq 0
\end{aligned}$$

Rõ ràng ta có  $\sum_{cyc} \frac{a^2(b-c)^2}{8a^2+bc} \geq 0$ .

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} \frac{b+c-2a}{8a^2+bc} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c-a}{8a^2+bc} - \sum_{cyc} \frac{a-b}{8a^2+bc} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a-b}{8b^2+ca} - \sum_{cyc} \frac{a-b}{8a^2+bc} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(8a+8b-c)}{(8a^2+bc)(8b^2+ca)} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(8a+8b-c)(8c^2+ab) \geq 0
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Đặt

$$S_a = (8b+8c-a)(8a^2+bc)$$

$$S_b = (8c+8a-b)(8b^2+ca)$$

$$S_c = (8a+8b-c)(8c^2+ab)$$

Thì ta có  $S_b, S_c > 0$ .

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Ta có  $a^2(8b^2+ca) \geq b^2(8a^2+bc)$

Do đó

$$\begin{aligned}
a^2 S_b + b^2 S_a &= a^2(8c+8a-b)(8b^2+ca) + b^2(8b+8c-a)(8a^2+bc) \\
&\geq b^2(8c+8a-b)(8a^2+bc) + b^2(8b+8c-a)(8a^2+bc) \\
&= b^2(8a^2+bc)(7a+7b+16c) \\
&> 0
\end{aligned}$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có đpcm.

### Bài 5.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} \geq 0$$

#### Chứng minh.

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{c^2 - a^2}{a^2 + bc} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{b^2 + ca} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b)^2 (a+b)(a+b-c)(c^2 + ab) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = (b+c)(b+c-a)(a^2+bc)$$

$$S_b = (c+a)(c+a-b)(b^2+ca)$$

$$S_c = (a+b)(a+b-c)(c^2+ab)$$

Thì ta có  $S_b, S_c \geq 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Ta chứng minh

$$b^2 S_a + a^2 S_b \geq 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow a^2(c+a-b)(c+a)(b^2+ca) \geq b^2(a-b-c)(b+c)(a^2+bc)$$

\* Nếu  $a \leq b+c$  bất đẳng thức (\*) hiển nhiên đúng.

\* Nếu  $a > b+c$

$$\text{Ta có } \begin{cases} c+a-b > a-b-c > 0 \\ c+a \geq b+c > 0 \\ a^2(b^2+ca) \geq b^2(c^2+ab) > 0 \end{cases} \quad \text{nên (*) đúng.}$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, t), (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

### Bài 6. (Cruz Mathematicorum)

$a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2} \leq \frac{4}{9} \cdot \left( \frac{R}{r} - 2 \right)$$

#### Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{R}{r} - 2 &= \frac{pabc}{4S^2} - 2 \\ &= \frac{2abc}{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)} - 2 \\ &= \sum \frac{(a-b)^2}{(c+a-b)(b+c-a)} \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2} &\leq \frac{4}{9} \cdot \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &\left( 4 \left( (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 9(b+c-a)(c+a-b) \right) \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Do  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác nên  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Do đó

$$4(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 9(b+c-a)(c+a-b) > 16c^2 - 9c^2 = 7c^2 > 0$$

Tương tự

$$4(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 9(a+b-c)(c+a-b) > 16a^2 - 9a^2 = 7a^2 > 0$$

$$4(\sqrt{c} + \sqrt{a})^2 (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 9(b+c-a)(a+b-c) > 16b^2 - 9b^2 = 7b^2 > 0$$

Từ đây, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 7. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c$  là những đại ba cạnh của một tam giác. Khi đó ta có

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$$

**Chứng minh.**

Ta có

$$\begin{aligned} & 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3 \\ \Leftrightarrow & 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} - 3\right) \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (5a - 5b + 3c)(a - b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt  $S_a = 5b - 5c + 3a, S_b = 5c - 5a + 3b, S_c = 5a - 5b + 3c$ .

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 1.**  $a \leq b \leq c$ . Khi đó ta có  $S_b \geq 0$  và

$$S_a + S_b = 8b - 2a > 0 \text{ (do } b \geq a)$$

$$S_c + S_b = 8c - 2b > 0$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 & \geq (S_a + S_b)(b - c)^2 + (S_c + S_b)(a - b)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

+ **Trường hợp 2.**  $a \geq b \geq c$ . Khi đó ta có  $S_a, S_c \geq 0$ . Do đó nếu  $S_b \geq 0$  thì ta có ngay đpcm, vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp  $S_b \leq 0$  như sau

$$\text{+ Trường hợp 2.1. } a + (\sqrt{3} - 1)c \leq \sqrt{3}b \Leftrightarrow a - c \leq \sqrt{3}(b - c)$$

Ta có

$$S_a + 3S_b = 14b + 10c - 12a \geq 12(b + c - a) > 0$$

Do đó

$$\begin{aligned} S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 & \geq (S_a + 3S_b)(b - c)^2 \geq 0 \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

$$\text{+ Trường hợp 2.2. } a + (\sqrt{3} - 1)c \geq \sqrt{3}b \Leftrightarrow a - b \geq (\sqrt{3} - 1)(b - c)$$

$$\text{+ Trường hợp 2.2.1. } a \geq \frac{3b}{2}$$

Ta có

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \geq 8(b + c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a > b + 13(a - b) - 5a = 8\left(a - \frac{3b}{2}\right) \geq 0$$

Do ñoii

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

+ Tröông hõp 2.2.2.  $a \leq \frac{3b}{2}$

+ Tröông hõp 2.2.2.1.  $a + c \geq 2b \Rightarrow c \geq \frac{a}{3}$

Ta coi

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \geq 8(b + c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a \geq \frac{2a}{3} + 13 \cdot \frac{a}{3} - 5a = 0$$

Do ñoii

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

+ Tröông hõp 2.2.2.2.  $a + c \leq 2b \Leftrightarrow a - c \leq 2(b - c)$

Ta coi

$$S_a + 4S_b + (\sqrt{3} - 1)^2 S_c = (5a - 5b + 3c)(\sqrt{3} - 1)^2 + 17b + 15c - 17a$$

Do  $a + (\sqrt{3} - 1)c \geq \sqrt{3}b$  nên  $b \leq \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{3} - 1)c}{\sqrt{3}}$

Suy ra

$$\begin{aligned} 5a - 5b + 3c &\geq 5a - \frac{5a}{\sqrt{3}} - \frac{5(\sqrt{3} - 1)c}{\sqrt{3}} + 3c \\ &= \frac{5(\sqrt{3} - 1)a}{\sqrt{3}} + \frac{(5 - 2\sqrt{3})c}{\sqrt{3}} \\ &> \frac{5(\sqrt{3} - 1)a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Do ñoii

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b + (\sqrt{3} - 1)^2 S_c &> \frac{5(\sqrt{3} - 1)^3 a}{\sqrt{3}} + 17b + 15c - 17a \\ &\geq \frac{5(\sqrt{3} - 1)^3 a}{\sqrt{3}} + 16(b + c) - 17a \end{aligned}$$

$$> \frac{5(\sqrt{3}-1)^3 a}{\sqrt{3}} - a > 0$$

Do ñoii

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq \left( S_a + 4S_b + (\sqrt{3}-1)^2 S_c \right) (b-c)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

### Bài 8.

$x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \geq \sqrt{2} \left( x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{z^2 + x^2} + z\sqrt{x^2 + y^2} \right)$$

### Chứng minh.

Ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) &\geq \\ &\geq 2\sqrt{2} \left( x\sqrt{y^2 + z^2} + y\sqrt{z^2 + x^2} + z\sqrt{x^2 + y^2} \right) - 4(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \left( x\sqrt{2(y^2 + z^2)} - x(y+z) \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{x(y-z)^2}{\sqrt{2(y^2 + z^2)} + y + z}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \geq 2 \sum_{cyc} \frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y}$$

Ta lại có

$$2 \sum_{cyc} \frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2 + y^2)} + x + y} \leq \sum_{cyc} \frac{z(x-y)^2}{x+y} \text{ (theo bất Bunhiacopxki)}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} (x-y)^2 \geq \sum_{cyc} \frac{z(x-y)^2}{x+y}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( 1 - \frac{z}{x+y} \right) (x-y)^2 \geq 0$$

Đặt  $S_x = 1 - \frac{x}{y+z}$ ,  $S_y = 1 - \frac{y}{z+x}$ ,  $S_z = 1 - \frac{z}{x+y}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Khi đó  $S_y, S_z > 0$

Ta có

$$x^2 S_y + y^2 S_x = x^2 + y^2 - \frac{x^2 y}{x+z} - \frac{xy^2}{y+z} \geq x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

### Bài 9. (Hojoo Lee)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \geq 33$$

#### Chứng minh.

Ta có

$$\frac{2(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} + \frac{9(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} - 33 = \frac{\left( \sum_{cyc} (a-b)^2 \right) \left( \sum_{cyc} c(a-b)^2 \right)}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 10. (IMO 2005)

$x, y, z$  là các số thực dương thỏa  $xyz \geq 1$ . Chứng minh

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0$$

#### Chứng minh.

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét trường hợp  $xyz = 1$  là đủ. Khi đó, ta có

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x^5 - x^2 \cdot xyz}{x^5 + (y^2 + z^2)xyz} = \frac{x^4 - x^2 yz}{x^4 + (y^2 + z^2)yz} \geq \frac{2x^4 - x^2(y^2 + z^2)}{2x^4 + (y^2 + z^2)^2}$$

Đặt  $a = x^2, b = y^2, c = z^2$ . Khi đó, ta chỉ cần chứng minh



$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b) \left( \frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (c+a)^2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b)^2 \cdot \frac{c^2 + ac + bc + a^2 + b^2 - ab}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (c+a)^2)} \geq 0 \text{ (ñu\grave{a}ng)} \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

### **Bài 11. (Moldova 2006)**

$a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2 \left( \frac{b}{c} - 1 \right) + b^2 \left( \frac{c}{a} - 1 \right) + c^2 \left( \frac{a}{b} - 1 \right) \geq 0$$

**Chứng minh.**

**+ Cách 1.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} a^3 b(b-c) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \sum_{cyc} c^2 (b+c-a)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (ñu\grave{a}ng)} \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**+ Cách 2.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} \geq \sum_{cyc} a^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 b}{c} + bc - 2ab \right) \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b(c-a)^2}{c} \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{c}{a} - \frac{1}{2} \right) \geq 0
\end{aligned}$$

Đặt  $S_a = \frac{a}{b} - \frac{1}{2}, S_b = \frac{b}{c} - \frac{1}{2}, S_c = \frac{c}{a} - \frac{1}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

**+ Trường hợp 1.**  $b+c > a \geq b \geq c$ . Thế thì ta có  $S_a, S_b > 0$ .

Ta có

$$S_b + S_c = \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 1 > 0 \text{ (do } b \geq c > 0 \text{)}$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

**+ Trường hợp 2.**  $a \leq b \leq c < a+b$ . Thế thì ta có  $S_c, S_b > 0$ .

Ta có

$$S_b + S_a = \frac{b}{c} + \frac{a}{b} - 1 > \frac{b}{c} + \frac{c-b}{b} - 1 = \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 = \frac{(b-c)^2}{bc} \geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 12.

$x, y, z$  là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2 + yz}{(y+z)^2} + \frac{y^2 + zx}{(z+x)^2} + \frac{z^2 + xy}{(x+y)^2} \geq \frac{3}{2}$$

#### Chứng minh.

Đặt  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ . Khi đó, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{2bc - ca - ab + a^2}{a^2} - 1 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{b(c-a)}{a^2} - \frac{c(a-b)}{a^2} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{b(c-a)}{a^2} - \sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)}{a^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)}{b^2} - \sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)}{a^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2} \geq 0 \text{ (ñuìng)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 13. (Gabriel Dospinescu)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \geq 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

#### Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)(ab + bc + ca)^2 \geq 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} a^6(b-c)^2(b^2 + bc + c^2) + 2abc(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \left( \sum_{\text{cyc}} c(a-b)^2 \right) \geq 0 \text{ (ñuìng)} \\ \Rightarrow & \text{ đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 14. (Old And New Inequalities)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\left| \sum_{cyc} \frac{a^3 - b^3}{a + b} \right| \leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{cyc} (a - b)^2$$

**Chứng minh.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} b + c = 2x \\ c + a = 2y \\ a + b = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = x - y + z \\ c = x + y - z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left| \sum_{cyc} \frac{(x - y)^3}{z} \right| \leq \sum_{cyc} (x - y)^2$$

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (x - y)^2 - \sum_{cyc} \frac{(x - y)^3}{z} &= \sum_{cyc} \frac{(x - y)^2 (y + z - x)}{z} \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 &\geq \sum_{cyc} \frac{(x - y)^3}{z} \end{aligned} \quad (1)$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (x - y)^2 + \sum_{cyc} \frac{(x - y)^3}{z} &= \sum_{cyc} \frac{(x - y)^2 (z + x - y)}{z} \geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 &\geq - \sum_{cyc} \frac{(x - y)^3}{z} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 15. (USA Team Selection Test 2004)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a + b + c - 3\sqrt[3]{abc} \leq 3 \max \left\{ (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2, (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2, (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \right\}$$

**Chứng minh.**

Đặt  $a = x^6, b = y^6, c = z^6$  ( $x, y, z > 0$ ). Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^6 + y^6 + z^6 - 3x^2y^2z^2 \leq 3 \max \{ (x^3 - y^3)^2, (y^3 - z^3)^2, (z^3 - x^3)^2 \}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} x^6 + y^6 + z^6 - 3x^2y^2z^2 &\leq (x^3 - y^3)^2 + (y^3 - z^3)^2 + (z^3 - x^3)^2 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x - y)^2 (2(x^2 + y^2 + xy)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(x + y)^2) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} S_x &= 2(y^2 + z^2 + yz)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(y + z)^2 \\ &= y^4 + z^4 + 4y^2z^2 + 2y^3z + 2yz^3 - x^2y^2 - x^2z^2 - 2x^2yz \\ S_y &= 2(z^2 + x^2 + zx)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(z + x)^2 \\ &= z^4 + x^4 + 4z^2x^2 + 2x^3z + 2xz^3 - x^2y^2 - y^2z^2 - 2xy^2z \\ &= (x + z)^2(x^2 - y^2) + 3z^2x^2 + 2xz^3 \\ S_z &= 2(x^2 + y^2 + xy)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)(x + y)^2 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y - z)^2 + S_y(z - x)^2 + S_z(x - y)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z > 0$ . Khi đó, rõ ràng ta có  $S_y, S_z > 0$ .

Ta có

$$S_x + S_y = (x^2 - y^2)^2 + 2z^3(x + y) + 2z(x + y)(x - y)^2 > 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ .

### Bài 16. (Phạm Kim Hùng)

$a \geq b \geq c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{3a^3 + 2b^3} \geq \frac{a+b+c}{5}$$

#### Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{3a^3 + 2b^3} &\geq \frac{a+b+c}{5} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{25a^4}{3a^3 + 2b^3} &\geq 5(a+b+c) \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{25a^4}{3a^3 + 2b^3} - 11a + 6b \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2(a-b)^2(-4a^2 + ab + 6b^2)}{3a^3 + 2b^3} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{-4b^2 + bc + 6c^2}{3b^3 + 2c^3}, S_b = \frac{-4c^2 + ca + 6a^2}{3c^3 + 2a^3}, S_c = \frac{-4a^2 + ab + 6b^2}{3a^3 + 2b^3}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Rõ ràng ta có  $S_b \geq 0$ . Ta sẽ chứng minh rằng

$$S_b + 2S_c \geq 0 \quad (1)$$

$$a^2S_b + 2b^2S_a \geq 0 \quad (2)$$

#### \* Chứng minh (1).

Ta có bất đẳng thức (1) tương đương với

$$\begin{aligned} 2a^3(a^2 + 2ab + 3b^2 - 6c^2) + 12a^2(ab^2 + b^3 - 2c^3) + \\ + 2(a^3b^2 + a^4c - 4b^3c^2) + a^4c + 2ab^3c + 6abc^3 + 36b^2c^3 \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này hiển nhiên đúng do  $a \geq b \geq c > 0$ . Vậy (1) đúng.

#### \* Chứng minh (2).

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(a) = a^2(3b^3 + 2c^3)(6a^2 + ac - 4c^2) + \\ + 2b^2(3c^3 + 2a^3)(6c^2 + bc - 4b^2) \geq 0$$

$$f'(a) = 24a^2(3ab^3 + 2ac^3 - 2b^4) + \\ + ac(3b^2(7ab + ac - 8bc) + 16c(ab^2 - c^3) + 53ab^2c) > 0 \text{ (do } a \geq b \geq c > 0) \\ \Rightarrow f(a) \text{ đồng biến.}$$

$$\Rightarrow f(a) \geq f(b) = b^2(b^2(2b^3 + 7b^2c + 3bc^2 - 12c^3) + 9b^3c^2 + 8bc^4 + 28c^5) \geq 0$$

$\Rightarrow (2)$  đúng.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \geq \\ \geq (S_b + 2S_c)(a-b)^2 + \frac{(b-c)^2(a^2S_b + 2b^2S_a)}{b^2} \geq 0 \text{ (do } a-c \geq \frac{a}{b} \cdot (b-c) \geq 0)$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài 17. (Phạm Kim Hùng)

Cho các số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{2a^2 + b^2} + \frac{b^3}{2b^2 + c^2} + \frac{c^3}{2c^2 + a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

*Chứng minh.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0$$

Coi 2 trường hợp xảy ra

+ Trường hợp 1.  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Khi đó ta coi

$$\frac{4b}{2a^2+b^2} - \frac{c}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \frac{-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(4c-2b)b^2}{2b^2+c^2} + \frac{(2a-c)a^2}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{4c-2b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) về theo vế trái chia cả hai vế cho 2, ta có

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0$$

+ Trường hợp 2.  $c \geq b \geq a \geq 0$ .

+ Trường hợp 2.1.  $2b \geq c + a$ . Khi này ta sẽ chứng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2} \geq 0$$

Thật vậy, để thấy vế trái là hàm tăng của  $c$  nên ta chỉ cần chứng minh khi  $c = b$ , tức là chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-b)}{2b^2+a^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4b^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 16a^3 - 8a^2b + 8ab^2 - 4b^3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3a(5a^2 - 2ab + 2b^2) \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

Do này  $\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2} \geq 0$

Vậy

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq \\ & \geq \frac{2b-a}{4(2a^2+b^2)} \cdot (c-a)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2.2.  $2b \leq c + a$ . Khi này ta sẽ chứng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{6a-3c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (3)$$

Thật vậy, để thấy vế trái là hàm tăng của  $c$  nên chỉ cần chứng minh khi  $c = 2b - a$ .

Bất đẳng thức (3) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{9a-6b}{8b^2+3a^2-8ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 10b^3 - 15b^2a + 2a^2b + 15a^3 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{2c-b}{2b^2+c^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (4)$$



Thật vậy, vì về trái là hàm giảm theo  $a$  nên ta chỉ cần chứng minh khi  $a = b$ , bất đẳng thức trở thành

$$\frac{4c-2b}{2b^2+c^2} + \frac{6b-3c}{2c^2+b^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5c^3 + 2c^2b - 2b^2c + 10b^3 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Nếu  $c \leq 2a$  thì ta có bất đẳng thức cần chứng minh đúng. Nếu  $c \geq 2a$  thì từ 2 bất đẳng thức trên, với chú ý rằng  $(c-a)^2 \leq 3(b-a)^2 + \frac{3}{2}(c-b)^2$ , ta có

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq$$

$$\geq \left( \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{3(2a-c)}{2c^2+a^2} \right) \cdot (b-a)^2 + \left( \frac{2c-b}{2b^2+c^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \right) \cdot (c-b)^2$$

$$\geq 0$$

Tóm lại, ta luôn có

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### **Bài 18. (Phạm Văn Thuận)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

### **Chứng minh.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{1}{2(ab+bc+ca)} - \frac{c}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 ((a+b-c)(ab+bc+ca) - abc) \geq 0$$

Đặt

$$S_a = (-a+b+c)(ab+bc+ca) - abc$$

$$S_b = (a-b+c)(ab+bc+ca) - abc$$

$$S_c = (a+b-c)(ab+bc+ca) - abc$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Thế thì ta có  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$S_a + S_b = 2c^2(a+b) \geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

### **Bài 19. (Phạm Văn Thuận)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) \leq 2$$

#### **Chứng minh.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left( \sum_{cyc} (a-b)^2 \right) \left( \frac{4}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a+b+c}{abc} - \frac{1}{ab+bc+ca} \right) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng do  $\frac{a+b+c}{abc} \geq \frac{9}{ab+bc+ca}$ .

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### **Bài 20. (Phạm Kim Hùng)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} + \frac{2b^2+5ca}{(c+a)^2} + \frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} \geq \frac{21}{4}$$

#### **Chứng minh.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left( \frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} - \frac{7}{4} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{8a^2-7b^2-7c^2+6bc}{(b+c)^2} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{(b+c)^2} - 4 \sum_{cyc} \frac{c^2 - a^2}{(b+c)^2} - 3 \sum_{cyc} \frac{(b-c)^2}{(b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{4(a+b)(a+b+2c)}{(a+c)^2(b+c)^2} - \frac{3}{(a+b)^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 (4(a+b)^3(a+b+2c) - 3(a+c)^2(b+c)^2) \geq 0$$

Đặt

$$S_a = 4(b+c)^3(b+c+2a) - 3(a+b)^2(a+c)^2$$

$$S_b = 4(a+c)^3(a+2b+c) - 3(a+b)^2(b+c)^2$$

$$S_c = 4(a+b)^3(a+b+2c) - 3(a+c)^2(b+c)^2$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Khi đó, ta dễ dàng nhận thấy  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} S_b + S_a &= 4(c+a)^3(a+2b+c) - 3(a+b)^2(b+c)^2 + \\ &\quad + 4(b+c)^3(b+c+2a) - 3(a+b)^2(a+c)^2 \\ &= 8c(a+b)((a+c)^2 + (b+c)^2) + (a-b)^2(a^2 + b^2 + 4ab + 2ac + 2bc - 2c^2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, t), (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

**\* Chú ý.**

$\frac{5}{2}$  cũng là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức

$$\frac{a^2 + kbc}{(b+c)^2} + \frac{b^2 + kca}{(c+a)^2} + \frac{c^2 + kab}{(a+b)^2} \geq \frac{3(k+1)}{4}$$

**Bài 21.**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + a + b + c \geq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

**Chứng minh.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left( \frac{a^2}{b} + b - 2a \right) &\geq 2 \left( \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} - a - b - c \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a - b)^2 \left( \frac{1}{b} - \frac{2}{a + b + c} \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt  $S_a = \frac{1}{c} - \frac{2}{a + b + c}$ ,  $S_b = \frac{1}{a} - \frac{2}{a + b + c}$ ,  $S_c = \frac{1}{b} - \frac{2}{a + b + c}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

Ta có

$$S_a + S_b + S_c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{6}{a + b + c} \geq \frac{9}{a + b + c} - \frac{6}{a + b + c} = \frac{3}{a + b + c} > 0$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a &= \frac{\sum_{cyc} a(a + b - c)(a - b + c)}{abc(a + b + c)^2} \\ &= \frac{\sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a + b)}{abc(a + b + c)^2} \\ &\geq \frac{\sum_{cyc} a^3 + 3abc - \sum_{cyc} ab(a + b)}{abc(a + b + c)^2} \\ &\geq 0 \text{ (theo bñt Schur)} \end{aligned}$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 5, ta có đpcm.

## Bài 22. (Phạm Kim Hùng)

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a + b + c}.$$

**Chứng minh.**

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(c + \frac{a^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a + b + c} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} a^2 + 2 \sum_{cyc} \frac{ab^2}{c} + \sum_{cyc} \frac{a^4}{b^2} \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a + b + c} \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{cyc} \left( \frac{ab^2}{c} + ac - 2ab \right) + \sum_{cyc} \left( \frac{a^4}{b^2} + b^2 - 2a^2 \right) + \\ & + 2 \left( \sum_{cyc} ab - \sum_{cyc} a^2 \right) \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a + b + c} - 4(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (b - c)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{a + b + c} + \frac{2(a + b)}{c} - 4 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{a + b + c} + \frac{2(a + b)}{c} - 4$$

$$S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{4b}{a + b + c} + \frac{2(b + c)}{a} - 4$$

$$S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{4c}{a + b + c} + \frac{2(c + a)}{b} - 4$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

Có 2 trường hợp xảy ra

+ **Trường hợp 1.**  $c \geq b \geq a > 0$ . Khi này ta có  $S_b \geq 0$ .

Ta có

$$S_a + S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(a + b)}{a + b + c} + \frac{2(a + b)}{c} + \frac{2(b + c)}{a} - 8 \geq 0$$

$$\text{Vì } \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \frac{2a}{c} + \frac{2c}{a} \geq 4, \frac{2b}{a} \geq 2$$

$$S_c + S_b = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(b+c)}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} + \frac{2(b+c)}{a} - 8 \geq 0$$

$$\text{Vì } \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 4, \frac{2c}{a} \geq 2$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Tröông hüp 2.**  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi ñoù ta coi  $S_a \geq 1, S_c \geq -1$ .

Ta coi

$$S_a + 2S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{4(b+c)}{a} - 12 \geq 0$$

$$\text{Vì } \frac{4a+8b}{a+b+c} \geq 4, \frac{2a}{c} + \frac{2b}{a} \geq 4, \frac{2c}{a} + \frac{2a}{c} \geq 4$$

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 20 \\ &\geq \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 16 = f(b) \end{aligned}$$

Đe dàng kiểm tra  $f(b)$  là hàm ñöng biến. Do ñoù

$$f(b) \geq f(c) = \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16c}{a} + \frac{2a}{c} - 9 \geq 2\sqrt{32} - 9 > 1$$

+ **Khai ñang 2.1.**  $a+c \leq 2b \Leftrightarrow 2(b-c) \geq a-c \geq 0 \wedge b-c \geq a-b \geq 0$ .

Neu  $S_b \geq 0$  thì ta coi ngay ñpcm. Neu  $S_b \leq 0$ , thì

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b - 1)(b-c)^2 \geq 0$$

+ **Khai ñang 2.2.**  $a+c \geq 2b$ . Khi ñoù ta se ñöng minh  $S_c + 2S_b \geq 0$ . Thât vậy,

ta coi

$$S_c + 2S_b = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2c^2}{a^2} + \frac{8b+4c}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} + \frac{4(b+c)}{a} - 12 = g(c)$$

+ **Khai ñang 2.2.1.**  $a \geq 2b$ . Khi ñoù do  $g(c)$  là hàm tăng ñen

$$g(c) \geq g(0) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b}{a+b} + \frac{4b}{a} + \frac{2a}{b} - 12 \geq 0$$

$$\text{Vì } \frac{a}{b} + \frac{9b}{a+b} \geq 5, \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 4, \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} \geq 6, \frac{-b}{a+b} \geq \frac{-1}{3}$$

+ **Khai ñang 2.2.2.**  $a \leq 2b$ . Khi ñoù do  $g(c)$  là hàm tăng ñen

$$g(c) \geq g(2b-a) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b^2}{a^2} + \frac{4b}{a} - \frac{4a}{3b} - \frac{14}{3} \geq 0 \quad (\text{do } 2b \geq a \geq b)$$

Vậy

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 23.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{29a^3 - b^3}{6a^2 + ab} \leq 4(a + b + c)$$

### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{29a^3 - b^3}{6a^2 + ab} - 4a \right) \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{b^3 + 4a^2b - 5a^3}{6a^2 + ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{(b-a)(5a^2 + ab + b^2)}{6a^2 + ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{(b-a)(b^2 - a^2)}{6a^2 + ab} + \sum_{\text{cyc}} (b-a) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{(b-a)^2(a+b)}{6a^2 + ab} \geq 0 \quad (\text{đúng}) \\ \Rightarrow & \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 24.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{4a^3 + 5b^3 - 3a^2b + 10ab^2}{3a + b} \geq 5(a^2 + b^2 + c^2) - ab - bc - ca$$

### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{4a^3 + 5b^3 - 3a^2b + 10ab^2}{3a + b} - (a^2 + 4b^2 - ab) \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^3 + 5b^3 - 3a^2b + 10ab^2 - (3a+b)(a^2 + 4b^2 - ab)}{3a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2}{3a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b-a)^2(a+b)}{3a+b} \geq 0 \text{ (ñu\u00f0ng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 25.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{3a^3 + 7b^3}{2a + 3b} \geq 3(a^2 + b^2 + c^2) - ab - bc - ca$$

### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \left( \frac{3a^3 + 7b^3}{2a + 3b} - (a^2 + 2b^2 - ab) \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3a^3 + 7b^3 - (2a + 3b)(a^2 + 2b^2 - ab)}{2a + 3b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3 + b^3 - a^2b - ab^2}{2a + 3b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b-a)^2(a+b)}{2a + 3b} \geq 0 \text{ (ñu\u00f0ng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .



### Bài 26.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{2a^4}{a^3 + b^3} \geq a + b + c$$

#### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{4a^4}{a^3 + b^3} &\geq 2(a + b + c) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{4a^4}{a^3 + b^3} - 5a + 3b \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(3b^2 + ab - a^2)}{a^3 + b^3} &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{3c^2 + bc - b^2}{b^3 + c^3} \\ S_b &= \frac{3a^2 + ac - c^2}{c^3 + a^3} \\ S_c &= \frac{3b^2 + ab - a^2}{a^3 + b^3} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 1.**  $a \leq b \leq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_c, S_a \geq 0$ . Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh được  $S_c + 2S_b \geq 0, S_a + 2S_b \geq 0$ .

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 3, ta suy ra đpcm.

+ **Trường hợp 2.**  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_b \geq 0$ .

Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$\begin{aligned} S_b + 2S_c &\geq 0 \\ a^2 S_b + 2b^2 S_a &\geq 0 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
& 2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \geq \\
& \geq (S_b + 2S_c)(a-b)^2 + \frac{(b-c)^2}{b^2} \cdot (a^2S_b + 2b^2S_a) \\
& \geq 0 \text{ (do } a-c \geq \frac{a}{b} \cdot (b-c) \geq 0)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 27.

$x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 - z^2}{y+z} \geq 0$$

### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{cyc}} \frac{4x^2}{y+z} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{4z^2}{y+z} \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{4x^2}{y+z} - 2(x+y+z) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{4z^2}{y+z} - 2(x+y+z) \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{4x^2}{y+z} - (y+z) \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{4z^2}{y+z} + (y-3z) \right) \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{4x^2 - y^2 - z^2 - 2yz}{y+z} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{(y-z)^2}{y+z} \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{4x^2 - 2y^2 - 2z^2}{y+z} + \sum_{\text{cyc}} \frac{(y-z)^2}{y+z} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{(y-z)^2}{y+z} \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{4x^2 - 2y^2 - 2z^2}{y+z} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{y+z} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 - y^2}{y+z} - \sum_{\text{cyc}} \frac{z^2 - x^2}{y+z} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 - y^2}{y+z} - \sum_{\text{cyc}} \frac{x^2 - y^2}{x+z} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2(x+y)}{(y+z)(x+z)} \geq 0$$

Đây là điều hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

### Bài 28.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{4a(b^2 + c^2)}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} \leq 3$$

### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{4a(b^2 + c^2)}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} - \sum_{cyc} \frac{2a(b+c)^2}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} \leq 3 - \sum_{cyc} \frac{2a(b+c)^2}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{2a(b-c)^2}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} \leq \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{1}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 2b^2 + c^2} - \frac{2c}{(a+b)(a^2 + b^2 + 2c^2)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{1}{a^2 + 2b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2c^2} - \frac{2a}{(b+c)(2a^2 + b^2 + c^2)} \\ S_b &= \frac{1}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2c^2} - \frac{2b}{(c+a)(a^2 + 2b^2 + c^2)} \\ S_c &= \frac{1}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + 2b^2 + c^2} - \frac{2c}{(a+b)(a^2 + b^2 + 2c^2)} \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ .

Ta có

$$S_b = \frac{1}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 + 2c^2} - \frac{2b}{(c+a)(a^2 + 2b^2 + c^2)}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{2b}{a} \cdot \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \\
&= \left( \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \right) + \left( \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \right) \\
&= \frac{(a-b)(a^2+b^2+c^2-ab)}{a(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)} + \left( \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \right) \\
&\geq \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \\
&\geq \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_c &= \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} - \frac{2c}{(a+b)(a^2+b^2+2c^2)} \\
&\geq \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} \\
&\geq \frac{4}{3a^2+3b^2+2c^2} - \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} \\
&= \frac{a^2+b^2+6c^2}{(a^2+b^2+2c^2)(3a^2+3b^2+2c^2)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Do đó  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta lại có

$$\begin{aligned}
\frac{S_a}{a^2} + \frac{S_b}{b^2} &= \frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)} + \frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)} - \frac{2}{a(b+c)(2a^2+b^2+c^2)} + \\
&\quad + \frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)} - \frac{2}{b(c+a)(a^2+2b^2+c^2)} \\
&\geq \frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)} + \frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)} - \frac{2}{ab(2a^2+b^2+c^2)} + \\
&\quad + \frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)} - \frac{2}{ab(a^2+2b^2+c^2)} \\
&= \left( \frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)} - \frac{2}{ab(a^2+2b^2+c^2)} \right) +
\end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)} + \frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)} - \frac{2}{ab(2a^2+b^2+c^2)} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0.$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 29.

$a, b, c > 0$  và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot abc \geq \frac{5}{4}$$

### Chứng minh.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 4(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 5(ab + bc + ca)^2 \\ \Leftrightarrow & 4 \sum_{sym} a^3 b - 5 \sum_{cyc} a^2 b^2 - 6(a + b + c)abc + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 0 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{5}{2} \cdot \sum_{sym} a^3 b \geq 5 \sum_{cyc} a^2 b^2$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot \sum_{sym} a^3 b + 3abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 6abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow & \sum_{sym} a^3 b + 2abc\sqrt{3(ab + bc + ca)} \geq 4abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow & 2abc \left( a + b + c - \sqrt{3(ab + bc + ca)} \right) \leq \sum_{sym} a^3 b - 2abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow & \frac{abc \cdot \sum_{cyc} (a - b)^2}{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}} \leq \sum_{cyc} (ab + ac)(b - c)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (b - c)^2 \left( ab + ac - \frac{abc}{a + b + c + \sqrt{3(ab + bc + ca)}} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Điều này rõ ràng đúng vì

$$\frac{abc}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} < \min\{ab, bc, ca\}$$

⇒ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 30. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a}{a+bc} \geq \frac{3}{2}$$

#### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2 \sum_{cyc} a(b+ca)(c+ab) \geq 3(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$\Leftrightarrow 3abc + \sum_{cyc} a^2b^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc \left( \sum_{cyc} a^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow 3abc + \frac{1}{2} \sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \geq 3a^2b^2c^2 + abc \left( \sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} a \right)$$

$$\Leftrightarrow 9abc + \frac{3}{2} \sum_{cyc} c^2(a-b)^2 \geq 9a^2b^2c^2 + abc \left( \sum_{cyc} (a-b)^2 \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( abc^2 + \frac{3c^2}{2} - \frac{abc}{2} \right) \geq 0$$

Đặt  $S_a = a^2bc + \frac{3a^2}{2} - \frac{abc}{2}$ ,  $S_b = ab^2c + \frac{3b^2}{2} - \frac{abc}{2}$ ,  $S_c = abc^2 + \frac{3c^2}{2} - \frac{abc}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_a > 0$ .

Ta có

$$S_b > \frac{3b^2}{2} - \frac{abc}{2} = \frac{b}{2} \cdot (3b - ac) > 0$$

$$S_b + S_c > \frac{3(b^2 + c^2)}{2} - abc \geq 3bc - abc = bc(3 - a) > 0$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 31. (Nguyễn Anh Cường)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca}{2a^2 + bc} \geq 6$$

#### Chứng minh.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \left( \frac{2(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)}{2a^2 + bc} - 4 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{-6a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab - 2bc + 2ca}{2a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(3a - b + 2c)(c - a) - (3a + 2b - c)(a - b)}{2a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(3a - b + 2c)(c - a)}{2a^2 + bc} - \sum_{cyc} \frac{(3a + 2b - c)(a - b)}{2a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(2a + 3b - c)(a - b)}{2b^2 + ca} - \sum_{cyc} \frac{(3a + 2b - c)(a - b)}{2a^2 + bc} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a - b)^2 (4a^2 + 4b^2 + c^2 + 6ab - 5bc - 5ca)(2c^2 + ab) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = (a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6bc - 5ab - 5ca)(2a^2 + bc)$$

$$S_b = (4a^2 + b^2 + 4c^2 + 6ca - 5ab - 5bc)(2b^2 + ca)$$

$$S_c = (4a^2 + 4b^2 + c^2 + 6ab - 5ac - 5bc)(2c^2 + ab)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b - c)^2 + S_b(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} a^2 S_b + b^2 S_a &= a^2(4a^2 + b^2 + 4c^2 + 6ca - 5ab - 5bc)(2b^2 + ca) + \\ &+ b^2(a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6bc - 5ab - 5ca)(2a^2 + bc) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì

$$a^2(2b^2 + ca) \geq b^2(2a^2 + bc) > 0$$

và

$$(4a^2 + b^2 + 4c^2 + 6ca - 5ab - 5bc) + (a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 6bc - 5ab - 5ca) \geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

### Bài 32.

$a, b, c > 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a}{2 + b^2 + c^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

### Chứng minh.

Áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{2 + b^2 + c^2} = \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a + ab^2 + ac^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c) + \sum_{sym} a^2b} = \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c) - 3abc}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c) - 3abc} &\geq \frac{3\sqrt{3}}{8} \\ \Leftrightarrow 8(a+b+c)^2 + 9\sqrt{3}abc &\geq 9\sqrt{3}(a+b+c) \\ \Leftrightarrow 8(a+b+c)^2\sqrt{ab+bc+ca} + 9\sqrt{3}abc &\geq 9\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow 8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca} \left( a+b+c - \sqrt{ab+bc+ca} \right) &\geq \\ &\geq \sqrt{3}((a+b+c)(ab+bc+ca) - 9abc) \\ \Leftrightarrow \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} \cdot \left( \sum_{cyc} (a-b)^2 \right) &\geq \sqrt{3} \left( \sum_{cyc} c(a-b)^2 \right) \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}c \right) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c + \sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}a$$



$$S_b = \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}b$$

$$S_c = \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}c$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta chứng minh

$$a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4(a^2 b + b^2 c + ab^2 + ca^2 + a^3 + b^3)\sqrt{ab+bc+ca} &\geq \\ &\geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2 b + ab^2) + 3(a^2 b + ab^2)\sqrt{ab+bc+ca} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4(b^2 c + ca^2 + a^3 + b^3)\sqrt{ab+bc+ca} + \\ + (a^2 b + ab^2)\sqrt{ab+bc+ca} \geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2 b + ab^2) \end{aligned}$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$4(a^3 + b^3)\sqrt{ab} + (a^2 b + ab^2)\sqrt{ab} > \sqrt{3}(a+b)(a^2 b + ab^2) \quad (1)$$

Và

$$4a^2 c\sqrt{ab+bc+ca} > \sqrt{3}c(a^2 b + ab^2) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra  $a^2 S_b + b^2 S_a \geq 0$ .

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### **Bài 33.**

$x, y, z > 0$  thỏa  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{y+z}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 3$$

### **Chứng minh.**

Đặt  $x = a^2, y = b^2, z = c^2$  ( $a, b, c > 0$ ) thì  $abc = 1$  và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2}{a} \geq a + b + c + 3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2}{a} - 2a - 2b - 2c \geq 3 - a - b - c$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có  $0 \geq 3 - a - b - c$ . Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2}{a} - 2a - 2b - 2c \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{b^2 + c^2 - 2a^2}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c^2 - a^2}{a} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{b} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b)}{ab} \geq 0 \text{ (rõ ràng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

### Bài 34. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + bc}{b^2 + bc + c^2} \geq 2$$

**Chứng minh.**

\* **Bổ đề.** Nếu  $a, b, c, x, y, z$  là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $a \geq b \geq c$  và  $x \geq y \geq z$  (hoặc  $x \leq y \leq z$ ) thì

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

**Chứng minh.**

+ **Trường hợp 1.**  $x \geq y \geq z \geq 0$ .

Ta có

$$a - c \geq b - c \geq 0 \text{ (do } a \geq b \geq c)$$

$$\Rightarrow x(a - c) \geq y(b - c) \geq 0$$

Mà  $a - b \geq 0$  nên

$$x(a - c)(a - b) \geq y(b - c)(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x(a - c)(a - b) + y(b - c)(b - a) \geq 0$$

Mặt khác, do  $a \geq b \geq c$  và  $z \geq 0$  nên

$$z(c - a)(c - b) \geq 0$$

Do đó

$$x(a - b)(a - c) + y(b - c)(b - a) + z(c - a)(c - b) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.**  $0 \leq x \leq y \leq z$ .

Ta có

$$a - c \geq a - b \geq 0 \text{ (do } a \geq b \geq c)$$

$$\Rightarrow z(a - c) \geq y(a - b) \geq 0$$

Mà  $b - c \geq 0$  nên

$$z(a - c)(b - c) \geq y(a - b)(b - c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z(c - a)(c - b) + y(b - c)(b - a) \geq 0$$

Mặt khác, do  $a \geq b \geq c$  và  $x \geq 0$  nên

$$x(a - c)(a - b) \geq 0$$

Do đó

$$x(a - b)(a - c) + y(b - c)(b - a) + z(c - a)(c - b) \geq 0$$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta.

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, ta có

$$0 < b^2 + bc + c^2 \leq a^2 + ac + c^2 \leq a^2 + ab + b^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{1}{a^2 + ac + c^2} \geq \frac{1}{a^2 + ab + b^2} > 0$$

Áp dụng Bổ đề trên với  $x = \frac{1}{b^2 + bc + c^2}$ ,  $y = \frac{1}{a^2 + ac + c^2}$ ,  $z = \frac{1}{a^2 + ab + b^2}$  ta suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2} &\geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2+bc+c^2} &\geq \sum_{cyc} \frac{ab+ac-bc}{b^2+bc+c^2} \\ \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2} &\geq \sum_{cyc} \frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2} \end{aligned}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2} - \frac{2a}{a+b+c} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{b^2+bc+c^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2} - \sum_{cyc} \frac{ca(c-a)}{b^2+bc+c^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2} - \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{a^2+ac+c^2} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2(a+b+c)}{(b^2+bc+c^2)(a^2+ac+c^2)} &\geq 0 \text{ (ñuìng)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 35.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

### Chứng minh.

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \leq \sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \quad (*)$$

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{a + b} - \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \\
& = \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 + b^2}{a + b} - \frac{(a + b)}{2} \right) - \left( \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} - a - b - c \right) \\
& = \sum_{cyc} \frac{(a - b)^2}{2(a + b)} - \frac{\sum_{cyc} (a - b)^2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + a + b + c} \\
& = \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a - b)^2 \left( \frac{1}{a + b} - \frac{2}{\sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} + a + b + c} \right) \\
& \geq \frac{1}{2} \sum_{cyc} (a - b)^2 \left( \frac{1}{a + b} - \frac{1}{a + b + c} \right) \text{ (theo bñt Bunhiacopxki)} \\
& \geq 0 \\
& \Rightarrow (*) \text{ đúng.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{a + b} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c}$$

**+ Cách 1.**

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{a + b} \leq \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{a + b + c} \\
& \Leftrightarrow (a + b + c) \left( \sum_{cyc} \frac{a^2 + b^2}{a + b} \right) \leq 3(a^2 + b^2 + c^2) \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c(a^2 + b^2)}{a + b} \leq a^2 + b^2 + c^2 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( c^2 - \frac{c(a^2 + b^2)}{a + b} \right) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ca(c - a)}{a + b} - \sum_{cyc} \frac{bc(b - c)}{a + b} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{b+c} - \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)}{c+a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a-b)^2}{(b+c)(c+a)} \geq 0 \text{ (ñiing)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

## + Cách 2.

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+b^2}{a+b} \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2+b^2}{a+b} - \frac{(a+b)}{2} \right) \leq \frac{3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{2}{a+b+c} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b-c)}{a+b} \geq 0$$

Đặt  $S_a = \frac{b+c-a}{b+c}$ ,  $S_b = \frac{c+a-b}{c+a}$ ,  $S_c = \frac{a+b-c}{a+b}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$b^2 S_a + a^2 S_b = a^2 + b^2 - \frac{a^2 b}{a+c} - \frac{ab^2}{b+c} > a^2 + b^2 - \frac{a^2 b}{a} - \frac{ab^2}{b} = (a-b)^2 \geq 0$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

### Bài 36. (Hojoo Lee)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2 + 2bc} \geq 1 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{a^2 + 2bc}$$

**Chứng minh.**

\* Chứng minh

$$1 \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{bc}{a^2 + 2bc} \quad (*)$$

\* **Bổ đề.** Nếu  $a, b, c, x, y, z$  là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $a \geq b \geq c$  và  $x \geq y \geq z$  (hoặc  $x \leq y \leq z$ ) thì

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

**Chứng minh.**

+ **Trường hợp 1.**  $x \geq y \geq z \geq 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} a-c &\geq b-c \geq 0 \quad (\text{do } a \geq b \geq c) \\ \Rightarrow x(a-c) &\geq y(b-c) \geq 0 \end{aligned}$$

Mà  $a-b \geq 0$  nên

$$\begin{aligned} x(a-c)(a-b) &\geq y(b-c)(a-b) \geq 0 \\ \Leftrightarrow x(a-c)(a-b) + y(b-c)(b-a) &\geq 0 \end{aligned}$$

Mặt khác, do  $a \geq b \geq c$  và  $z \geq 0$  nên

$$z(c-a)(c-b) \geq 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.**  $0 \leq x \leq y \leq z$ .

Ta có

$$\begin{aligned} a-c &\geq a-b \geq 0 \quad (\text{do } a \geq b \geq c) \\ \Rightarrow z(a-c) &\geq y(a-b) \geq 0 \end{aligned}$$

Mà  $b-c \geq 0$  nên

$$z(a-c)(b-c) \geq y(a-b)(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow z(c-a)(c-b) + y(b-c)(b-a) \geq 0$$

Mặt khác, do  $a \geq b \geq c$  và  $x \geq 0$  nên

$$x(a-c)(a-b) \geq 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c) + y(b-c)(b-a) + z(c-a)(c-b) \geq 0$$

Bỏ đề được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{bc}{ab+bc+ca} - \frac{bc}{a^2+2bc} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{bc(a-b)(a-c)}{(ab+bc+ca)(a^2+2bc)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca} \cdot \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc} \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} a^3 + 2abc &\geq b^3 + 2abc \geq c^3 + 2abc > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c^3 + 2abc} &\geq \frac{1}{b^3 + 2abc} \geq \frac{1}{a^3 + 2abc} > 0 \end{aligned}$$

Áp dụng bỏ đề trên với  $x = \frac{1}{a^3 + 2abc}$ ,  $y = \frac{1}{b^3 + 2abc}$ ,  $z = \frac{1}{c^3 + 2abc}$  ta suy ra được

$$\sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a^3 + 2abc} \geq 0$$

Vậy (\*) đúng.

\* *Chứng minh*

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a^2 + 2bc} \geq 1 \quad (**)$$

Ta có

$$(**) \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2}{a^2 + 2bc} - \frac{a}{a+b+c} \right) \geq 0$$



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(ab+ac-2bc)}{a^2+2bc} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ca(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{ab(c-a)}{a^2+2bc} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ca(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{bc(a-b)}{b^2+2ca} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab) \geq 0
\end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = a(2ab+2ca-bc)(a^2+2bc)$$

$$S_b = b(2ab+2bc-ca)(b^2+2ca)$$

$$S_c = c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_a, S_b \geq 0$ .

Dễ thấy  $b(b^2+2ca) \geq c(c^2+2ab) \geq 0$  nên

$$\begin{aligned}
vS_b + S_c &\geq c(c^2+2ab)(2ab+2bc-ca+2bc+2ca-ab) \\
&= c(c^2+2ab)(ab+4bc+ca) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra ngay đpcm.

### **Bài 37. (Hojoo Lee)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b+c} \geq a+b+c$$

**Chứng minh.**

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b+c} \geq a+b+c$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{a^2 + bc}{b+c} - \frac{(b+c)}{2} \right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{b+c} - \sum_{cyc} \frac{c^2 - a^2}{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{b+c} - \sum_{cyc} \frac{a^2 - b^2}{a+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b)}{(b+c)(a+c)} \geq 0 \text{ (h\`ung)}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài 38. (Gabriel Dospinescu)

$x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{3x+1} + \frac{3}{x+y+z+1} \geq \sum_{sym} \frac{1}{2x+y+1}$$

**Chứng minh.**

Đặt  $a = x + \frac{1}{3}, b = y + \frac{1}{3}, c = z + \frac{1}{3}$ .

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} \frac{1}{3a} + \frac{3}{a+b+c} \geq \sum_{sym} \frac{1}{2a+b} \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{1}{3a} + \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{2a+b} - \frac{1}{2a+c} \right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(4a+b+c)((2a+b)(2a+c) - 3a(a+b+c))}{a(a+b+c)(2a+b)(2a+c)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+b)} - \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+c)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+b)} - \sum_{cyc} \frac{(b-a)(b-c)}{b(a+2b)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \cdot \frac{2bc + 2ca - ab}{ab(2a+b)(a+2b)} \geq 0
\end{aligned}$$

$$\text{Đặt } S_a = \frac{2ab + 2ca - bc}{bc(2b+c)(b+2c)}, S_b = \frac{2ab + 2bc - ca}{ca(2a+c)(a+2c)}, S_c = \frac{2bc + 2ca - ab}{ab(2a+b)(a+2b)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_a, S_b \geq 0$ .

Do  $b \geq c$  nên

$$\begin{aligned} b(2a+b)(a+2b) &\geq c(2a+c)(a+2c) > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{c(2a+c)(a+2c)} &\geq \frac{1}{b(2a+b)(a+2b)} > 0 \\ \Rightarrow S_b + S_c &= \frac{2ab + 2bc - ca}{ca(2a+c)(a+2c)} + \frac{2bc + 2ca - ab}{ab(2a+b)(a+2b)} \\ &\geq \frac{2ab + 2bc - ca}{ba(2a+b)(a+2b)} + \frac{2bc + 2ca - ab}{ab(2a+b)(a+2b)} \\ &= \frac{ab + 4bc + ca}{ba(2a+b)(a+2b)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có ngay đpcm.

### **Bài 39. (Iran 1996)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

**Chứng minh.**

**\* Cách 1.**

Không mất tính tổng quát giả sử  $c \geq b \geq a > 0$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x, y, z \text{ là độ dài ba cạnh của một tam giác.}$$

Do  $c \geq b \geq a > 0$  nên  $x \geq y \geq z > 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{4z^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow (2xy + 2yz + 2zx - x^2 - y^2 - z^2) \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right) \geq 9$$

$$\sum_{cyc} (x-y)^2 \left( \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2} \right) \geq 0$$

Đặt  $S_x = \frac{2}{yz} - \frac{1}{x^2}$ ,  $S_y = \frac{2}{zx} - \frac{1}{y^2}$ ,  $S_z = \frac{2}{xy} - \frac{1}{z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Do  $x \geq y \geq z > 0$  và  $y+z > x$  nên  $S_x \geq 0$  và  $S_y \geq 0$

Ta chứng minh

$$y^2 S_y + z^2 S_z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 + z^3 \geq xyz$$

Mà  $y+z > x$  nên ta chỉ cần chứng minh

$$y^3 + z^3 \geq (y+z)yz$$

$$\Leftrightarrow (y-z)^2(y+z) \geq 0 \text{ (rõ ràng)}$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

**\* Cách 2.**

**Bổ đề.** Nếu  $a, b, c, x, y, z$  là 6 số thực không âm thỏa  $a \geq b \geq c$  và  $x \leq y \leq z$  thì

$$x(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2) + y(c-a)^2(3ca+ab+bc-b^2) + z(a-b)^2(3ab+bc+ca-c^2) \geq 0$$

*Chứng minh Bổ đề.*

Do  $a \geq b \geq c$  nên

$$3ca+ab+bc-b^2 \geq 0$$

$$3ab+bc+ca-c^2 \geq 0$$

Do đó

+ Nếu  $3bc+ca+ab-a^2 \geq 0$  thì bổ đề hiển nhiên đúng.

+ Nếu  $3bc + ca + ab - a^2 \leq 0$  thì

$$(b-c)^2(3bc + ca + ab - a^2) \leq 0$$

$$\Rightarrow x(b-c)^2(3bc + ca + ab - a^2) \geq y(b-c)^2(3bc + ca + ab - a^2)$$

Lại có  $z \geq y$  nên

$$z(a-b)^2(3ab + bc + ca - c^2) \geq y(a-b)^2(3ab + bc + ca - c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} x(b-c)^2(3bc + ca + ab - a^2) &\geq y \left( \sum_{cyc} (b-c)^2(3bc + ca + ab - a^2) \right) \\ &= 4y \left( \sum_{cyc} ab(a-b)^2 \right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{4(ab + bc + ca)}{(a+b)^2} - 3 \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2} - \frac{(3a+c)(b-c)}{(a+b)^2} \right) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2} - \sum_{cyc} \frac{(3a+c)(b-c)}{(a+b)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2} - \sum_{cyc} \frac{(3a+c)(a-b)}{(a+c)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \cdot \frac{3ab + bc + ca - c^2}{(b+c)^2(a+c)^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(a+b)^2(3ab + bc + ca - c^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, ta có

$$(a+b)^2 \geq (c+a)^2 \geq (b+c)^2 > 0$$

Áp dụng Bổ đề trên với  $z = (a+b)^2$ ,  $y = (c+a)^2$ ,  $x = (b+c)^2$

ta suy ra được

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 (a+b)^2 (3ab+bc+ca-c^2) \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

#### Bài 40. (Komal)

$a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} \geq \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \cdot \frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

#### Chứng minh.

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} &\geq \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \cdot \frac{2}{a^2+b^2+c^2} \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca - \frac{3abc}{a+b+c} &\geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2} \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca - \frac{9abc}{a+b+c} &\geq \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2} - \frac{6abc}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2}{a+b+c} &\geq \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2(c^2+bc+ca-2ab)}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} c(a-b)^2(a^2+b^2+2ab-bc-ca) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = a(b^2 + c^2 + 2bc - ca - ab)$$

$$S_b = b(c^2 + a^2 + 2ca - ab - bc)$$

$$S_c = c(a^2 + b^2 + 2ab - bc - ca)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Khi đó, dễ thấy  $S_b, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$a^2 S_b + b^2 S_a = ab((a-b)^2(a+b) + 2c(a^2+b^2-ab) + c(a^2+b^2)) > 0$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

## II. Bài tập đề nghị.

Mời các bạn giải các bài toán sau để làm quen với phương pháp trên và nếu có thể các bạn hãy thử giải các bài toán này bằng phương pháp khác nhé!

### Bài 1.

a) (Old and New Inequalities)  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + b}{b + c} \geq 2$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn)  $a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + 5b}{b + c} \geq 8$$

c) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số  $k$  lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + kb}{b + c} \geq \frac{3k + 1}{2}$$

### Bài 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + 5bc}{(b + c)^2} \geq \frac{21}{4} + \frac{59(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2}{4(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}$$

b) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số  $k$  lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + 5bc}{(b + c)^2} \geq \frac{21}{4} + \frac{k(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2}{(a + b)^2(b + c)^2(c + a)^2}$$

### Bài 3. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + 2bc}{b + c} \geq \frac{3(a + b + c)}{2}$$

b) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số  $k$  lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + kbc}{b+c} \geq \frac{(k+1)(a+b+c)}{2}$$

**Bài 4. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$  và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

**Bài 5. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq 9+k$$

**Bài 6. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$4(a^4 + b^4 + c^4) + 3abc(a+b+c) \geq 7(a^3b + b^3c + c^3a)$$

**Bài 7. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \geq \frac{3(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

**Bài 8. (Mathnfriends)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{21}{2(a^2 + b^2 + c^2) + 5(ab + bc + ca)}$$

**Bài 9. (Olympic 30 - 4 - 2006)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{6}{5}$$



**Bài 10. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+2b} \geq \sum_{cyc} \frac{a^2}{2a+b}$$

**Bài 11. (Stronger than Vietnam TST 2006 – Võ Quốc Bá Cẩn)**

a)  $x, y, z \in [1, 2]$ . Chứng minh rằng

$$(x+y+z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + \frac{9(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}$$

b) Với các điều kiện như trên, hãy tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$(x+y+z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \right) + \frac{k(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}$$

**Bài 12. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{b^2+c^2}{a(b+c)} - \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 13. (Diendantoanhoc)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{9}{(a+b+c)^2}$$

**Bài 14. (Gabriel Dospinescu)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$27 + \left( 2 + \frac{a^2}{bc} \right) \left( 2 + \frac{b^2}{ca} \right) \left( 2 + \frac{c^2}{ab} \right) \geq 6(a+b+c) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

**Bài 15. (Belarus 1997)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b} \geq \sum_{cyc} \frac{a+c}{b+c}$$

Bài 16. (Belarus 1998)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

Bài 17. (Mathlinks)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a+c}$$

Bài 18. (Mathlinks)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a} \geq 4 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \right)$$

Bài 19. (Mildorf)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$2 \sum_{\text{cyc}} a^6 + 16 \sum_{\text{cyc}} a^3 b^3 \geq 9 \sum_{\text{cyc}} a^2 b^2 (a^2 + b^2)$$

Bài 20. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{7(a^2 + b^2 + c^2)}{4b^2 - bc + 4c^2} \geq 9$$

Bài 21. (Mathlinks)

$a, b, c > 0$  và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1 + a^2 b^2}{(a+b)^2} \geq \frac{5}{2}$$

Bài 22. (Diendantoanhoc)

$a, b, c > 0$  và  $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{a^2 - bc + 1} \leq 3$$

**Bài 23. (Japan 2004)**

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$2 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b} \right) \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{1+a}{1-a}$$

**Bài 24. (Vasile Cirtoaje)**

$a, b, c > 0$ , đặt  $E(a, b, c) = \sum_{\text{cyc}} a(a-b)(a-c)$ . Chứng minh rằng

a)  $(a + b + c)E(a, b, c) \geq \sum_{\text{cyc}} ab(a - b)^2$

b)  $\left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) E(a, b, c) \geq \sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} ab$

**Bài 25. (Vasile Cirtoaje)**

$x, y, z > 0, xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$(x + y)(y + z)(z + x) + 7 \geq 5(x + y + z)$$

**Bài 26. (Vasile Cirtoaje)**

a)  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$3 \left( \sum_{\text{cyc}} x^4 - \sum_{\text{cyc}} x^3 y \right) \geq \sum_{\text{cyc}} z^2 (x - y)^2$$

b) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên cũng đúng cho  $x, y, z \in \mathbb{R}$ .

**Bài 27. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$  và  $ab + bc + ca = \frac{1}{3}$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{a^2 - bc + 1} \geq \frac{1}{a + b + c}$$

**Bài 28. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{9}{2}$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + kbc}{b^2 + c^2} \geq \frac{3(k+1)}{2}$$

c) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{9}{2} + \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2 + b^2)(b^2 + c^2)(c^2 + a^2)}$$

**Bài 29.** (Mathlinks)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{2a}{3a^2 + bc}$$

**Bài 30.**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \sum_{cyc} \frac{a}{b+c}$$

**Bài 31.** (VMO 2006B)

$a, b, c > 0, abc = 1$ . Tìm  $k$  max sao cho

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + 3k \geq (k+1)(a+b+c)$$

**Bài 32.** (Võ Quốc Bá Cẩn)

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{a^2 + 2bc} \geq 4$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{(b+c)^2}{a^2 + 2bc} \geq 4 + \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2 + 2bc)(b^2 + 2ca)(c^2 + 2ab)}$$

**Bài 33.**

a) (Mathlinks)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{3}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)} \leq \frac{1}{3} - \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(2a+b)(2b+c)(2c+a)(2a+c)(2c+b)(2b+a)}$$

**Bài 34. (Mathinks)**

$a, b, c > 0$  và  $p \geq 3 + \sqrt{7}$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{1}{pa^2 + bc} \geq \frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}$$

**Bài 35. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$  và  $p > -2$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab + (p-1)bc + ca}{b^2 + pbc + c^2} \geq \frac{3(p+1)}{p+2}$$

**Bài 36. (Stronger than Schur - Nguyễn Anh Cường)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab\sqrt{2(a^2 + b^2)} + bc\sqrt{2(b^2 + c^2)} + ca\sqrt{2(c^2 + a^2)}$$

**Bài 37. (JBMO 2002)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{b^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b}$$

**Bài 38. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a^2 + b^2 + 3c^2} \leq \frac{3}{5}$$

**Bài 39. (Phạm Kim Hùng)**

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} a^4 + \sum_{\text{cyc}} a^3b \geq 2 \left( \sum_{\text{cyc}} ab^3 \right)$$

b) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên cũng đúng cho  $a, b, c \in \mathbf{R}$ .

**Bài 40. (Diendantoanhoc)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a^4 + \sqrt{2} \left( \sum_{cyc} a^3 b \right) \geq (\sqrt{2} + 1) \left( \sum_{cyc} ab^3 \right)$$

**Bài 41. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + 3bc}{b^2 + bc + c^2} \geq 5$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 + kbc}{b^2 + bc + c^2} \geq k + 1$$

c) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 + 3bc}{b^2 + bc + c^2} \geq 5 + \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)}$$

**Bài 42. (Vasile Cirtoaje)**

$a, b, c > 0, p \in \mathbf{R}$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} (a - pb)(a - pc)(a - b)(a - c) \geq 0$$

**Bài 43. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{b+c}{a} \geq 3 + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca)}{abc(a + b + c)}$$

**Bài 44. (Diendantoanhoc)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\sum_{cyc} \frac{b+c}{a}} + \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{6} + 1$$

**Bài 45. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab + bc + ca}{ab + bc + ca + 3a^2} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 46. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq a^2 + b^2 + c^2$$

**Bài 47. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + bc}{a^2 + (b+c)^2} \leq \frac{18}{5} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{(a+b+c)^2}$$

**Bài 48. (Mathnfriend)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{15}{4} \cdot \frac{(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2}{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}$$

**Bài 49. (Mathnfriend)**

$a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4} + \frac{47}{4} \cdot \frac{(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2}{(a+b)^2 (b+c)^2 (c+a)^2}$$

**Bài 50. (Vasile Cirtoaje).**

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b^2 + c^2 - 4a^2}{a(b+c)} + 3 \geq 0$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b^2 + c^2 - ka^2}{a(b+c)} + \frac{3(k-2)}{2} \geq 0$$

[Bài 51. \(Toán Học Tuổi Trẻ 1998\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2}$$

[Bài 52. \(Mathlinks\)](#)

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \left( \frac{1}{a} - 2 \right)^2 \geq \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

[Bài 53. \(Mathlinks\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$2 \sum_{cyc} a^3 + 9 \sum_{cyc} a^2 b + \left( \sum_{cyc} a \right)^3 \geq 12 \left( \sum_{cyc} a^2 \right) \left( \sum_{cyc} a \right)$$

[Bài 54. \(Mathlinks\)](#)

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{abc} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{10}{ab + bc + ca}$$

[Bài 55. \(Mathnfriend\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^3}{2a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a + b + c}{4}$$

[Bài 56. \(Mathlinks\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 + 2bc} \geq \frac{2}{ab + bc + ca} + \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

[Bài 57. \(Mathlinks\)](#)

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a \sqrt{a^2 + 2bc} \geq \sqrt{3}(ab + bc + ca)$$



b)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2 + 3bc} \geq 2(ab + bc + ca)$$

c)  $a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2 + kbc} \geq \sqrt{k+1}(ab + bc + ca)$$

**Bài 58.**

$a, b, c > 0$  và  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca + \frac{5}{2} \cdot \left( (a+b)\sqrt{ab} + (b+c)\sqrt{bc} + (c+a)\sqrt{ca} \right) \leq 2$$

**Bài 59.**

a) (Mathlinks)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{b+c}{2a^2+bc} \geq \frac{6}{a+b+c}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$(a+b+c) \left( \sum_{cyc} \frac{b+c}{2a^2+bc} \right) \geq 6 + \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)}$$

**Bài 60. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+c)} \leq \sum_{cyc} \frac{bc}{a^3(b+c)}$$

**Bài 61. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$4 \left( \sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c} \right)^2 \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

[Bài 62. \(Japan 1997\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2} \geq \frac{3}{5}$$

[Bài 63. \(USA 2003\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \leq 8$$

[Bài 64. \(Poland 1992\)](#)

$a, b, c \in \mathbf{R}$ . Chứng minh rằng

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \geq (a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

[Bài 65. \(Mathlinks\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{11a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{11b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{11c^2+ab}} \geq \frac{3}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

[Bài 66.](#)

a) (Mathlinks)  $a, b, c > 0$  và  $ab+bc+ca=1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, hãy tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2} + \frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2} + \frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2} \geq \frac{5}{2} + \frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

[Bài 67. \(Phạm Kim Hùng\)](#)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} + \frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)} \geq \frac{5}{3}$$

**Bài 68. (Phạm Kim Hùng)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{54abc}{(a+b+c)^3} \geq 5$$

**Bài 69. (Phạm Kim Hùng)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4}{ab+bc+ca} + \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

**Bài 70. (Phạm Kim Hùng)**

$a, b, c > 0$  và  $ab+bc+ca=1$ ,  $k \geq 2 + \sqrt{3}$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1+bc}{ka^2+bc} + \frac{1+ca}{kb^2+ca} + \frac{1+ab}{kc^2+ab} \geq \frac{12}{k+1}$$

**Bài 71. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

a)  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{4b^2 - bc + 4c^2} \geq \frac{9}{7(a^2 + b^2 + c^2)}$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{1}{b^2 + kbc + c^2} \geq \frac{9}{(k+2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

**Bài 72. (VMO 1991)**

$x \geq y \geq z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

**Bài 73. (Mathinks)**

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} + \frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{3}{2} + k$$

Bài 74.

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) + (a+b+c)^2 \geq 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

Bài 75. (Phạm Kim Hùng)

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} + \frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2} \geq \frac{3}{8} + \frac{k}{3}$$

Bài 76. (Vasile Cirtoaje)

$a, b, c, k > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{ab + (k-3)bc + ca}{(b-c)^2 + kbc} \geq \frac{3(k-1)}{k}$$

Bài 77. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Chứng minh rằng với mọi  $a, b, c > 0, k \geq 1$  ta luôn có

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2 + kbc + c^2} \geq \frac{6}{k+2}$$

Bài 78. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} \frac{a(2a+b+c)}{ka^2 + bc} \geq \frac{12}{k+1}$$

Bài 79. (Toán Học Tuổi Trẻ 2002)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a) \leq 27a^2b^2c^2$$

Bài 80. (Manlio Marangelli)

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$3(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq abc(a+b+c)^3$$

**Bài 81. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c^2 + 2ab} \geq 1$$

**Bài 82. (Toán Học Tuổi Trẻ 2005)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{b+c}{a^2+bc} + \frac{c+a}{b^2+ca} + \frac{a+b}{c^2+ab}$$

**Bài 83. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} + \frac{kabc}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{8}{9} + \frac{k}{3}$$

**Bài 84. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

$a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \frac{kabc}{a^3+b^3+c^3} \geq \frac{3}{2} + \frac{k}{3}$$

**Bài 85. (Mathlinks)**

$a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{5a^2 - ab + 5b^2} \geq \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

# MỘT TÌM TÒI NHỎ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

VoiQuoc BaiCan

Bất đẳng thức là một trong những lĩnh vực hay, khó và loại cuốn nhất của toán học. Bạn có thể dễ dàng kiểm chứng nó ở nhiều nơi qua các trang web toán học, trong forum bất đẳng thức của các trang web này, luôn chiếm số lượng bài viết nhiều nhất. Bài viết sau đây, tôi xin giới thiệu một phương pháp hay, khái quát và dễ dàng minh chứng bất đẳng thức nói xing ba biến mà tôi tình cờ tìm được qua việc giải toán. Do trình độ còn hạn hẹp và đây chỉ là một tìm tòi nhỏ của tôi nên khó lòng tránh khỏi những sai sót, mong bạn đọc thông cảm.

Phương pháp này rất nên giải những khái quát và nó giúp tôi giải được nhiều bài toán khó mà những phương pháp mình khai S.O.S, đơn biến... nhanh bất lọc.

Xin đọc nội sô qua vè cô sô của phương pháp này, nội sô xây dựng hoàn toàn dựa trên 2 Bất đẳng thức cô bạn sau

\* Bất đẳng thức 1. (bất đẳng thức Schur)  $\forall a, b, c \geq 0$  thì

$$r \geq \frac{4pq - p^3}{9}$$

trong đó  $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc$ .

\* Bất đẳng thức 2.  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$  thì tồn tại các số thực  $x_0, y_0, x_1, y_1$  sao cho

$$\begin{aligned} p &= a + b + c = 2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1 \\ q &= ab + bc + ca = x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1 \\ x_0^2y_0 &\leq r = abc \leq x_1^2y_1 \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu  $a, b, c \geq 0$  thì  $x_0, x_1, y_1 \geq 0$ . Trong đó

+ Nếu  $p^2 \geq 4q$  thì  $y_0 \leq 0$

+ Nếu  $p^2 \leq 4q$  thì  $y_0 \geq 0$

Các kết quả trên chứng minh tổng nói trên giảm, các bạn nên tìm chứng minh lại, xem nhờ lại bài tập.

Nếu hiểu rõ hơn tính hiệu quả của phương pháp này, các bạn hãy cùng theo dõi các ví dụ sau

### Ví dụ 1. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

#### Lời giải.

Ta coi bất đẳng thức cần chứng minh tổng quát với

$$(ab + bc + ca) \cdot \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a + b + c} \right)^2 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$$

Do các vế của bất đẳng thức này không bất biến tính tổng quát, ta coi trường hợp  $a + b + c = 1$ . Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{1}{3}$ . Khi đó bất đẳng

thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} q(1 - 2q)^2 &\geq q^2 - 2r \\ f(r) = 18r + 9q(4q - 1)(q - 1) &\geq 0 \end{aligned} \quad (*)$$

\* Trường hợp 1.  $4q \leq 1$  thì (\*) hiển nhiên đúng.

\* Trường hợp 2.  $4q \geq 1$ , thì theo Bổ đề 1, ta coi

$$r \geq \frac{4q - 1}{9} \geq 0$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(r) = 18r + 9q(4q - 1)(q - 1) &\geq 2(4q - 1) + 9q(4q - 1)(q - 1) \\ &= (4q - 1)(2 - 3q)(1 - 3q) \geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (\*) đúng.

$\Rightarrow$  đpcm.

## Ví dụ 2. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$P(a, b, c) = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{c}{c+ab} \geq \frac{3}{2}$$

*Lời giải.*

Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow 0 \leq q \leq 3$ . Ta có bất đẳng thức tương đương với:

$$3r^2 + 2r(6 - q) - q^2 \leq 0$$

Từ Bất đẳng thức 1, ta có

$$3r^2 + 2r(6 - q) - q^2 \leq 3(x_1^2 y_1)^2 + (x_1^2 y_1)(6 - q) - q^2$$

Do đó để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần chứng minh

$$3(x_1^2 y_1)^2 + (x_1^2 y_1)(6 - q) - q^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow P(x_1, x_1, y_1) \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1 + 1} + \frac{y_1}{y_1 + x_1^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1 + 1} + \frac{y_1}{y_1 + \left(\frac{3 - y_1}{2}\right)^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1 + 1} + \frac{4y_1}{y_1^2 - 2y_1 + 9} \geq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - 1)^2(3 - y_1) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 3, b = c \rightarrow 0$  và các hoán vị.



### Ví dụ 3. (Phạm Kim Hưng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^2 + b^2 + c^2 + 16abc)$$

*Lời giải.*

$$\text{Đặt } q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow \begin{cases} q, r \geq 0 \\ q \leq \frac{1}{3} \end{cases} \text{ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có}$$

$$r \geq \frac{4q-1}{9}. \text{ Từ cách đặt, ta có}$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2r$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2q$$

Do nội bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$q \geq 8(q^2 - 2r)(16r + 1 - 2q)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 8(2r - q^2)(16r + 1 - 2q) + q \geq 0$$

$$\text{Ta có } f'(r) = 6(32r - (4q - 1)(2q + 1))$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $1 \geq 4q \Rightarrow f'(r) \geq 0 \Rightarrow f(r)$  là hàm đồng biến  $\forall r \geq 0$ .

\* Trường hợp 2.  $4q \geq 1 \Rightarrow r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ . Do nội

$$\begin{aligned} f'(r) &= 6(32r - (4q - 1)(2q + 1)) \geq 6\left(\frac{32(4q-1)}{9} - (4q-1)(2q+1)\right) \\ &= \frac{2(4q-1)(23-18q)}{3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(r) \text{ là hàm đồng biến } \forall r \geq 0.$$

Tóm lại, trong mỗi trường hợp, ta luôn có  $f(r)$  là hàm đồng biến  $\forall r \geq 0$ . Do nội

$$f(r) \geq f(0) = q(4q-1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

\* Chú ý

Các bạn nên chú ý rằng phương pháp này chỉ cần biết mối liên hệ qua lại với những bất đẳng thức mà dấu bằng xảy ra khi  $a = b = c$  hoặc trong ba số  $a, b, c$  có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau.

## BAI TAP

### Bài 1. (Iran 1996)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca) \left( \frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \right) \geq \frac{9}{4}$$

### Bài 2. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \leq (a+b+c)^6$$

### Bài 3.

Cho  $a, b, c \in \mathbf{R}$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2(a+b+c) - abc$$

### Bài 4.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \text{a) } & \frac{abc}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{ab + bc + ca}{a^2 + b^2 + c^2} \\ \text{b) } & \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc} + \frac{1}{4} \geq \left( \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} \right)^2 \end{aligned}$$

### Bài 5.

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}} + \sqrt{\frac{2(xy + yz + zx)}{x^2 + y^2 + z^2}} \geq 1 + \sqrt{2}$$

### Bài 6. (Vietnam TST 1996)

Cho  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Chứng minh rằng

$$(a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 \geq \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4)$$

**Bài 7.**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{9}{a+b+c} \geq 4 \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

**Bài 8.**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2+a^2} + \frac{1}{2+b^2} + \frac{1}{2+c^2} \leq 1$$

**Bài 9. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$$

**Bài 10. (Kvant 1993)**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + abcd \geq \min \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + \frac{d}{27} \right\}$$

**Bài 11. (Mihai Piticari, Dan Popescu)**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$5(a^2 + b^2 + c^2) \leq 6(a^3 + b^3 + c^3) + 1$$

**Bài 12.**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 2$$

**Bài 13.**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{\sqrt{xy + yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz + zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx + xy}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**Bài 14. (Phạm Văn Thuận)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca} \right) \geq 4$$

**Bài 15. (Toán Học Tuổi Trẻ 2002)**

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = 3(a+b+c) - 22abc$$

**Bài 16. (Voi Quot Bài Cạn)**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a+b+c=3$ . Chứng minh rằng

$$(1+a^{k+1})(1+b^{k+1})(1+c^{k+1}) \geq (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k) \quad \forall k \geq 1$$

**Bài 17. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$12 + 9abc \geq 7(ab + bc + ca)$$

**Bài 18. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $ab + bc + ca = 3$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + 7abc \geq 10$$

**Bài 19.**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a+b+c=3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{6-ab} + \frac{1}{6-bc} + \frac{1}{6-ca} \leq \frac{3}{5}$$

**Bài 20. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Chứng minh rằng

$$5(a+b+c) + \frac{3}{abc} \geq 18$$

# HAM LOẠI (LOẠI), HAM NỬA LOẠI NỬA LOẠI VÀ BẤT NĂNG THỨC

Với Quốc Bài Căn

## I. Các định nghĩa.

### 1. Định nghĩa hàm lồi (lồi).

Hàm số  $f(x)$  được gọi là lồi trên tập  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  nếu với mọi  $x, y \in [a, b]$  và với mọi cặp số không âm  $\alpha, \beta$  có tổng bằng 1, ta đều có

$$f(\alpha x + \beta y) \geq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Hàm số  $f(x)$  được gọi là lõm trên tập  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  nếu với mọi  $x, y \in [a, b]$  và với mọi cặp số không âm  $\alpha, \beta$  có tổng bằng 1, ta đều có

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

Kết quả sau đây chúng ta thường dùng nên cần biết một hàm lồi hay lõm

Nếu  $f(x)$  khả vi bậc hai trên  $[a, b]$  thì  $f(x)$  lồi (lõm) trên  $[a, b]$  khi và chỉ khi  $f''(x) \leq 0$  ( $f''(x) \geq 0$ )  $\forall x \in [a, b]$ .

### 2. Định nghĩa hàm nửa lồi nửa lõm.

Hàm số  $f(x)$  được gọi là nửa lồi nửa lõm trên  $[a, b] \subset \mathbf{R}$  nếu tồn tại duy nhất hằng số  $c$  ( $a < c < b$ ) sao cho  $f(x)$  lồi trên  $[a, c]$  và lõm trên  $[c, b]$  (hoặc ngược lại).

## II. Một số tính chất.

### 1. Tính chất 1.

Nếu  $f(x)$  là một hàm lõm trên  $[a, b]$  thì với mọi  $\begin{cases} b \geq x \geq z \geq y \geq a \\ x + y - z \geq a \end{cases}$  ta có

$$f(x) + f(y) \geq f(z) + f(x + y - z)$$

*Chứng minh.*

Ta có  $\forall h$  thỏa  $0 \leq h \leq x - y$  thì tồn tại  $\alpha \in [0, 1]$  sao cho  $h = \alpha(x - y)$

Do mỗi  $x - h = (1 - \alpha)x + \alpha y \in [a, b]$  nên theo định nghĩa hàm lồi, ta có

$$f(x - h) = f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

Tương tự, ta có  $y + h = \alpha x + (1 - \alpha)y \in [a, b]$  nên theo định nghĩa hàm lồi, ta cũng có

$$f(y + h) = f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

Do mỗi

$$f(x - h) + f(y + h) \leq f(x) + f(y) \quad (*)$$

Rõ ràng ta có  $0 \leq x - z \leq x - y$  nên áp dụng (\*) với  $h = x - z$ , ta có

$$f(x) + f(y) \geq f(z) + f(x + y - z)$$

Tính chất 1 được chứng minh hoàn toàn.

Từ tính chất 1 ta suy ra được tính chất 2 như sau

## 2. Tính chất 2.

Nếu  $f(x)$  là một hàm lồi trên  $[a, b]$  thì với mỗi  $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$  thỏa mãn  $x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n - 1)a \leq b$  thì ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq (n - 1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n - 1)a)$$

### Chứng minh.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo  $n$ .

Để thấy khẳng định đúng cho 1 biến số

Giả sử khẳng định đúng cho  $n$  biến số thì ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq (n - 1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n - 1)a)$$

Ta sẽ chứng minh khẳng định đúng cho  $n + 1$  biến số thì ta chứng minh

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n+1}) \leq nf(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - na)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ . Áp dụng giả

thiết quy nạp, ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \leq (n-1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)a)$$

Do nội hàm chứng minh khẳng định đúng cho  $n+1$  biến số ta cần chứng minh

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)a) + f(x_{n+1}) \leq f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - na)$$

Do  $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$  và  $b \geq x_i \geq a \quad \forall i = \overline{1, n}$  nên ta có

$$b \geq x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - na \geq x_{n+1} \geq a$$

Do nội hàm tính chất 1, ta có

$$\begin{aligned} & f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - na) \geq \\ & \geq f((x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} - na) + a - x_{n+1}) + f(x_{n+1}) \\ & = f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)a) + f(x_{n+1}) \end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng cho  $n+1$  biến số Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi  $n \geq 1$ .

Tính chất 2 cũng chứng minh.

### 3. Tính chất 2'.

Nếu  $f(x)$  là một hàm lồi trên  $[a, b]$  thì với mọi  $\begin{cases} x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b] \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)a \leq b \end{cases}$  thì

ta có

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n) \geq (n-1)f(a) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_n - (n-1)a)$$

### 4. Tính chất 3. (Hệ quả của định lý Lagrange)

+ Nếu  $f(x)$  khả vi bậc 2 trên  $[a, b]$  và lồi trên  $[a, b]$  thì với mọi  $x, x_0 \in [a, b]$  ta có

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

+ Nếu  $f(x)$  khả vi bậc 2 trên  $[a, b]$  và lõm trên  $[a, b]$  thì với mọi  $x, x_0 \in [a, b]$  ta có

$$f(x) \leq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Từ tính chất trên, ta suy ra một bất đẳng thức Jensen nổi tiếng. Các bạn hãy thử chứng minh lại bằng cách sử dụng tính chất 3 xem nhé! bài tập.



### III. Öng dùng vào bất đẳng thức.

Các ñnh lý sau ñây có thể xem nhờ là một phương pháp chứng minh bất ñẳng thức khá hiệu quả (bạn cũng nên tối chứng minh lấy xem nhờ là bài tập, lâu yù là ñề chứng minh chúng, ta chæ cần dùng các tính chất trên là ñủ).

#### 1. Ñnh lý 1.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số ñều ñiều mãn

i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

ii)  $x_i \in [a, b] \quad \forall i = \overline{1, n}$

iii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = C$  ( $C$  là hằng số)

và  $f$  là một hàm trên  $[a, b]$  ñều mãn  $f$  lõm trên  $[a, c]$  và lõm trên  $[c, b]$ .

Ñặt  $F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

Khi ñó

$F$  ñạt min khi  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{k-1} = a, x_{k+1} = \dots = x_n \in [a, b]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$F$  ñạt max khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} \in [a, b], x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = b$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

#### 2. Ñnh lý 1'.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số ñều ñiều mãn

i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

ii)  $x_i \in [a, b] \quad \forall i = \overline{1, n}$

iii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = C$  ( $C$  là hằng số)

và  $f$  là một hàm trên  $[a, b]$  ñều mãn  $f$  lõm trên  $[a, c]$  và lõm trên  $[c, b]$ .

Ñặt  $F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

Khi ñó

$F$  ñạt max khi  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_{k-1} = a, x_{k+1} = \dots = x_n \in [a, b]$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

$F$  ñạt min khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} \in [a, b], x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = b$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ )

### 3. Nđnh lýü2.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số thđc thoả mãn

i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

ii)  $x_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1, n}$

iii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = C$  ( $C$  là hằng số)

và  $f$  là một hàm trên  $[a, b]$  thoả mãn  $f$  lõi trên  $(-\infty, c]$  và lõm trên  $[c, +\infty)$ .

Nđt  $F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

Khi ñoij

$F$  ñt min khi  $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

$F$  ñt max khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ .

### 4. Nđnh lýü2'.

$x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số thđc thoả mãn

i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$

ii)  $x_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1, n}$

iii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = C$  ( $C$  là hằng số)

và  $f$  là một hàm trên  $[a, b]$  thoả mãn  $f$  lõm trên  $(-\infty, c]$  và lõi trên  $[c, +\infty)$ .

Nđt  $F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$

Khi ñoij

$F$  ñt max khi  $x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$

$F$  ñt min khi  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n$ .

## IV. Một số áp dụng.

### Ví dụ 1. (VME0 2004)

Cho tam giác nhọn  $ABC$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \operatorname{tg}A + 2\operatorname{tg}B + 5\operatorname{tg}C$$

*Lời giải.*

Xét hàm số  $f(x) = \operatorname{tg}x$  với  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}^2 x + 1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm lồi trên } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó theo tính chất hàm lồi, ta có

$$f(A) \geq f(\operatorname{arctg}3) + f'(\operatorname{arctg}3)(A - \operatorname{arctg}3) = 3 + 10(A - \operatorname{arctg}3)$$

Tương tự, ta có

$$f(B) \geq f(\operatorname{arctg}2) + f'(\operatorname{arctg}2)(B - \operatorname{arctg}2) = 2 + 5(B - \operatorname{arctg}2)$$

$$\Rightarrow 2f(B) \geq 4 + 10(B - \operatorname{arctg}2)$$

$$f(C) \geq f(\operatorname{arctg}1) + f'(\operatorname{arctg}1)(C - \operatorname{arctg}1) = 1 + 2(C - \operatorname{arctg}1)$$

$$\Rightarrow 5f(C) \geq 5 + 10(C - \operatorname{arctg}1)$$

Do đó

$$P = f(A) + 2f(B) + 5f(C)$$

$$\geq 12 + 10(A + B + C - \operatorname{arctg}3 - \operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}1)$$

$$= 12 \quad (\text{vì } A + B + C = \operatorname{arctg}3 + \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}1 = \pi)$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} A = \operatorname{arctg}3 \\ B = \operatorname{arctg}2 \\ C = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Vậy

$$\min P = 12.$$

### Ví dụ 2.

Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa  $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

### Lời giải.

Đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c}$ , bài toán chuyển về

$x, y, z > 0$  thỏa  $2x + 4y + 7z \leq 2xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp  $2x + 4y + 7z = 2xyz$  là đủ (tại

sao?). Đặt  $x = \sqrt{7}m, y = \frac{\sqrt{7}}{2}n, z = \frac{2\sqrt{7}}{7}p$  thì ta có  $m + n + p = mnp$ . Do đó ta có

tại tam giác nhọn  $ABC$  sao cho  $m = \operatorname{tg}A, n = \operatorname{tg}B, p = \operatorname{tg}C$ . Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot (14\operatorname{tg}A + 7\operatorname{tg}B + 4\operatorname{tg}C)$$

Xét hàm số  $f(x) = \operatorname{tg}x$  với  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}^2 x + 1) > 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm lồi trên } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Do đó theo tính chất hàm lồi, ta có

$$f(A) \geq f\left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) \left(A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7} \cdot \left( A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 14f(A) \geq 6\sqrt{7} + 32 \left( A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

Töông töi, ta coi

$$f(B) \geq f \left( \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right) + f' \left( \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right) \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7} \cdot \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 7f(B) \geq 5\sqrt{7} + 32 \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$f(C) \geq f \left( \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) + f' \left( \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

$$= \sqrt{7} + 8 \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

$$\Rightarrow 4f(C) \geq 4\sqrt{7} + 32 \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

Do ñoi

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot (14f(A) + 7f(B) + 4f(C))$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot \left( 15\sqrt{7} + 32 \left( A + B + C - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) \right)$$

$$= \frac{15}{2} \quad (\text{vì } A + B + C = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} + \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} + \operatorname{arctg} \sqrt{7} = \pi)$$

Nháng thöïc xay ra khi vaø chæ khi

$$\begin{cases} A = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \\ B = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \\ C = \operatorname{arctg} \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = \frac{5}{2} \\ p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vây

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

### Ví dụ 3. (Phạm Kim Hưng)

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . chứng minh rằng với mọi  $k > 0$  thì

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min \left\{ 1, \frac{n}{2^k} \right\}$$

#### Chứng minh.

Nếu  $n=1$  thì bất đẳng thức đã cho hiển nhiên đúng.

Nếu  $n=2$

+ Nếu  $0 < k < 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1$$

+ Nếu  $k \geq 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} = \frac{a_1^k + 1}{(a_1 + 1)^k} \geq \frac{1}{2^{k-1}} \quad (\text{theo bất đẳng thức Holder})$$

Xét  $n \geq 3$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng cho giá trị tối thiểu  $1 = \frac{n}{2^k} \Leftrightarrow k = \log_2 n$ .

Do  $n \geq 3$  nên  $n-1 > k > 1$ .

Khi đó

+  $\forall m \geq k$ , ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} \right)^{\frac{m}{k}} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left( \frac{n}{2^k} \right)^{\frac{m}{k}} = \frac{n}{2^m}$$

+  $\forall m \leq k$ , ta có

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \right)^{\frac{k}{m}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq 1$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

Đặt  $x_1 = \ln a_1, x_2 = \ln a_2, \dots, x_n = \ln a_n$  thì  $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ (do } a_1 a_2 \dots a_n = 1) \end{cases}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^k}$

Ta có

$$f'(x) = \frac{ke^x \cdot (ke^x - 1)}{(e^x + 1)^{k+2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln k$$

Do đó ta có  $f$  là hàm giảm trên  $(-\infty, -\ln k]$  và hàm tăng trên  $[-\ln k, +\infty)$

$\Rightarrow$  Theo Định lý 2, ta có

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+e^{x_i})^k} \text{ đạt min khi } x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min P &\geq \min \left\{ \frac{n-1}{(e^t + 1)^k} + \frac{1}{(e^{-(n-1)t} + 1)^k} \right\} \quad (t \geq 0) \\ &= \min \left\{ \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k} \right\} \quad (x = e^t \geq 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm min của hàm số  $g(x) = \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k}$  với  $x \geq 1$

Ta có  $g'(x) = (n-1)k \left( \frac{x^{(n-1)k-1}}{(x^{n-1} + 1)^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{(n-1)k-1} \cdot (x+1)^{k+1} = (x^{n-1} + 1)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{(n-1)k-1}{k+1}} \cdot (x+1) = x^{n-1} + 1 \quad (2)$$

Đặt  $t = x^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow t \geq 1$ . Khi đó phương trình (2) trở thành

$$t^{(n-1)k-1} \cdot (t^{k+1} + 1) = t^{(n-1)(k+1)} + 1$$

$$\Leftrightarrow t^{(n-1)(k+1)} - t^{nk} - t^{(n-1)k-1} + 1 = 0$$

Xét hàm số  $h(t) = t^{(n-1)(k+1)} - t^{nk} - t^{(n-1)k-1} + 1$  với  $t \geq 1$

Ta có  $h'(t) = t^{(n-1)k-2} \cdot ((n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1)$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow (n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1 = 0$$

Xét tiếp hàm số  $m(t) = (n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1$  với  $t \geq 1$

Ta có  $m'(t) = n(k+1)t^k ((n-1)t^{n-k-1} - k)$

Chú ý rằng  $n-1 > k$  nên  $m'(t) \geq n(k+1)t^k ((n-1) - k) > 0$

$\Rightarrow m(t)$  là hàm đồng biến trên  $[1, +\infty)$

Ta lại có  $m(1) = (n-1)(k+1) - nk - (n-1)k + 1 = n(1-k) < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = +\infty$

Nên phương trình  $m(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t_0 > 1$

$\Rightarrow$  Phương trình  $h'(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t_0 > 1$

Bảng biến thiên của  $h(t)$

|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| $t$     | 1 | $t_0$ | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | - | 0     | +         |
| $h(t)$  | 0 |       | $+\infty$ |

Cần có vào bảng biến thiên, ta có

$h(t) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt là 1 và  $t_1 > t_0 > 1$

Do đó  $g'(x) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt là 1 và  $t_1^{k+1} > 1$ .

Bảng biến thiên của  $g(x)$

|         |   |             |           |
|---------|---|-------------|-----------|
| $x$     | 1 | $t_1^{k+1}$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + | 0           | -         |
| $g(x)$  | 1 |             | 1         |

Cần có vào bảng biến thiên, ta suy ra



$$g(x) \geq \min \left\{ g(1), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right\} = 1 \quad \forall x \geq 1 \quad (3)$$

Tõõ(1) vàõ(3), ta suy ra ñpcm.

#### Ví dụ 4. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$  vàõ  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thoã  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chõõng minh

rãõg

$$\frac{1}{\sqrt{1+ka_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+ka_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+ka_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

*Lõõ giải.*

Ñãõ  $y_i = ka_i \ (i = \overline{1, n}) \Rightarrow y_1 y_2 \dots y_n = k^n$  vàõ  $k = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$ . Khi ñõõ bat

ñãõg thoã cãõ chõõng minh trõõthãõh

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+y_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+y_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

Khoãõg mãõ tĩõnh tõõng quãõt giãõisõõ  $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ .

Ñãõ  $x_1 = \ln y_1, x_2 = \ln y_2, \dots, x_n = \ln y_n$  thì  $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \ln k \text{ (do } a_1 a_2 \dots a_n = 1) \end{cases}$

Xẽõ hãõm sốã  $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^{1/2}}$

Tã cõõ  $f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4(e^x + 1)^{5/2}}; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Tõõ ñõõ ta cõõ  $f'$  loã trẽõ  $(-\infty, \ln 2]$  vàõ loã trẽõ  $[\ln 2, +\infty)$

$\Rightarrow$  Theo Ñõõnh lý 2, ta cõõ

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+y_i)^{1/2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+e^{x_i})^{1/2}} \text{ ñãõ max khi } x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n.$$

$$\Rightarrow \max P \leq \max \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{e^t + 1}} + \frac{1}{\sqrt{e^{n \ln k - (n-1)t} + 1}} \right\} \quad (t \leq \ln k)$$

$$= \max \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1} + k^n}} \right\} \quad (x = e^t \leq k) \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm max của hàm số  $g(x) = \frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1} + k^n}}$  với  $x \leq k$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } g'(x) &= \frac{n-1}{2} \cdot \left( \frac{k^n x^{\frac{n-3}{2}}}{(x^{n-1} + k^n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow k^n x^{\frac{n-3}{2}} \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}} = (x^{n-1} + k^n)^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow k^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-3}{3}} \cdot (x+1) = x^{n-1} + k^n \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt  $t = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t \leq k^{\frac{2}{3}}$ . Khi đó phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left( \frac{3}{t^2} + 1 \right) &= t^{\frac{3(n-1)}{2}} + k^n \\ \Leftrightarrow t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n &= 0 \end{aligned}$$

Xét hàm số  $h(t) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n$  với  $t \leq k^{\frac{2}{3}}$

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{2} t^{\frac{n-5}{2}} \cdot \left( 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} \right)$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} = 0$$

Xét tiếp hàm số  $m(t) = 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}$  với  $t \leq k^{\frac{2}{3}}$

$$\text{Ta có } m'(t) = \frac{3n}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \left( 2(n-1)t^{\frac{2n-3}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} \right)$$

$$m'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \left( \frac{k^{\frac{2n}{3}}}{2(n-1)} \right)^{\frac{2}{2n-3}}$$

Do  $0 < k \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$  nên  $t_0 < k^{\frac{2}{3}}$ . Qua  $t_0$  thì  $m'(t)$  đổi dấu từ âm sang dương nên

$m(t)$  nghịch biến trên  $(0, t_0]$  và đồng biến trên  $\left[ t_0, k^{\frac{2}{3}} \right)$ .

Ta lại có  $m(0) = 3 - n \leq 0, m\left(k^{\frac{2}{3}}\right) = nk^{\frac{2n}{3}}(2-k) > 0$  (do  $2 > \frac{2n-1}{(n-1)^2} \geq k$ )

Nên phương trình  $m(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$ .

$\Rightarrow$  Phương trình  $h'(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$

Bảng biến thiên của  $h(t)$

|         |       |       |           |
|---------|-------|-------|-----------|
| $t$     | 0     | $t_1$ | $k^{2/3}$ |
| $h'(t)$ | -     | 0     | +         |
| $h(t)$  | $k^n$ |       | 0         |

Cần có vào bảng biến thiên, ta có

$h(t) = 0$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $k^{2/3}$  và  $t_2 < t_1$ .

Do nên  $g'(x) = 0$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $k$  và  $t_2^{3/2} < t_1^{3/2} < k$ .

Bảng biến thiên của  $g(x)$

|         |   |             |     |
|---------|---|-------------|-----|
| $x$     | 0 | $t_2^{3/2}$ | $k$ |
| $g'(x)$ | - | 0           | + 0 |
| $g(x)$  |   |             |     |

Cần có vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$g(x) \leq \max\{g(0), g(k)\} = \frac{n}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x \leq k \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta suy ra đpcm.

### Ví dụ 5. (Voi Quốc Bài Cẩn)

Cho các số thực  $x, y, z$  thỏa  $\begin{cases} x, y, z \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị

nhỏ nhất của biểu thức

$$P(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{y}{y^2 + 1} + \frac{z}{z^2 + 1}$$

#### Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta coi thể giả sử  $x \leq y \leq z$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$  với  $x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Ta có

$$f'(x) = \frac{x(x^2 - 3)}{(x^2 + 1)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

Qua 0 thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên  $f(x)$  lớn trên  $(-\sqrt{3}, 0]$  và nhỏ trên  $[0, \sqrt{3})$ .

Do đó theo Định lý 1', ta có  $P(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$  đạt max khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3}, y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y = -\sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Hay

$$x = y = z = \frac{1}{3} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = z = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = y = -\sqrt{3} \\ z = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Ta lại có

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$$

$$P\left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) = \frac{5+4\sqrt{3}}{4(4+\sqrt{3})} < \frac{9}{10}$$

Do ñoài

$$\max P(x, y, z) = \frac{9}{10}.$$

Cũng theo Ñònh lý 1', ta coi  $P(x, y, z) = f(x) + f(y) + f(z)$  ñạt min khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y, z = \sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = z = \sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Hay

$$x = y = z = \frac{1}{3} \vee \begin{cases} x = y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ z = \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1-2\sqrt{3} \\ y = z = \sqrt{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Ta lại coi

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$$

$$P\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right) = \frac{5-4\sqrt{3}}{4(4-\sqrt{3})}$$

Vậy

$$\min P(x, y, z) = \frac{5-4\sqrt{3}}{4(4-\sqrt{3})}.$$

Kết luận

$$\max P(x, y, z) = \frac{9}{10}$$

$$\min P(x, y, z) = \frac{5-4\sqrt{3}}{4(4-\sqrt{3})}$$

**Ví dụ 6. (Cruz mathematicorum)**

Cho các số không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ( $n \geq 2$ ) thỏa  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Chứng minh rằng

$$P = \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}} + \sqrt{\frac{1-x_2}{1+x_2}} + \dots + \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} \leq n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

**Chứng minh.**

Xét hàm số  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  với  $x \in [0, 1]$ .

Ta có

$$f''(x) = \frac{(1+x)^2(1-2x)}{(1+x)^3(1-x)\sqrt{(1+x)^3(1-x)}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Qua  $\frac{1}{2}$  thì  $f''(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên  $f(x)$  lớn trên  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$  và nhỏ trên

$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ . Do đó theo Định lý 1', ta có  $P = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$  đạt max khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0, x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n & (m = \overline{0, n-1}) \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0 \\ x_{m+1} = x_{m+2} = \dots = x_n = \frac{1}{n-m} & (m = \overline{0, n-1}) \end{cases}$$

+ Nếu  $m = n-1$  thì ta có

$$\begin{aligned} P &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\ &\leq (n-1)f(0) + f(1) \\ &= n-1 \\ &< n-2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \end{aligned} \tag{1}$$

+ Nếu  $m < n-1$  thì ta coi

$$\begin{aligned}
 P &= f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\
 &\leq mf(0) + (n-m)f\left(\frac{1}{n-m}\right) \\
 &= m + (n-m)\sqrt{\frac{n-m-1}{n-m+1}} \\
 &= n-t + t\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \\
 &= g(t)
 \end{aligned}$$

Trong đó  $t = n-m \in [2, n]$ .

Ta coi

$$\begin{aligned}
 g'(t) &= \frac{t^2 - \sqrt{(t+1)^3(t-1)}}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}} \\
 &= \frac{t^4 - (t+1)^3(t-1)}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}(t^2 + \sqrt{(t+1)^3(t-1)})} \\
 &= \frac{-2t^3 + 2t^2 + 1}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}(t^2 + \sqrt{(t+1)^3(t-1)})} \\
 &< 0 \quad (\text{do } t \geq 2)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(t)$  là hàm nghịch biến trên  $[2, n]$ .

$$\Rightarrow g(t) \leq g(2) = n-2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \forall t \in [2, n]$$

$$\Rightarrow P \leq n-2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$P \leq n-2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Ví dụ 7.

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2 - a + 1} + \frac{1}{b^2 - b + 1} + \frac{1}{c^2 - c + 1} \leq 3$$

### Nhận xét.

Ta coi thể đặt  $a = e^x, b = e^y, c = e^z$  ( $x, y, z \in \mathbf{R}$ ) thì ta có  $x + y + z = 0$ . Nếu vậy,

nếu làm theo cách làm trên, ta sẽ xét hàm số  $f(t) = \frac{1}{e^{2t} - e^t + 1}$  nếu xem  $f(t)$  có

là hàm lẻ hay không. Nhưng rồi thay,  $f(t)$  lại không phải là hàm

lẻ hay chẵn. Thật vậy, ta có  $f''(t) = \frac{e^t(4e^{3t} - 3e^{2t} - 3e^t + 1)}{(e^{2t} - e^t + 1)^3}$ . Để thấy  $f''(t)$

không phải là hàm lẻ hay chẵn. Vậy phải

làm sao bây giờ? Làm thế nào để vượt qua nỗi này? Sau đây giải pháp của tôi cho

vấn đề trên

### Chứng minh.

Ta coi Bỏ đi sau

**Bỏ đi** Với mọi số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ , ta có

$$P(a, b, c) = \frac{1}{a^2 + a + 1} + \frac{1}{b^2 + b + 1} + \frac{1}{c^2 + c + 1} \geq 1$$

Chứng minh.

Do  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$  nên tồn tại  $x, y, z \in \mathbf{R}$  sao cho  $a = e^x, b = e^y, c = e^z$ . Khi

đó ta có  $x + y + z = 0$  và  $P(a, b, c) = f(x) + f(y) + f(z)$  với  $f(t) = \frac{1}{e^{2t} + e^t + 1}$ .

Ta có

$$f''(t) = \frac{e^t(4e^{3t} + 3e^{2t} - 3e^t - 1)}{(e^{2t} + e^t + 1)^3}$$



Để thấy  $f''(t) = 0$  có duy nhất mỗi nghiệm  $t_0$  và qua  $t_0$  thì  $f''(t)$  đổi dấu từ âm sang dương nên  $f(t)$  lồi trên  $(-\infty, t_0]$  và lõm trên  $[t_0, +\infty)$  nên theo Định lý 2, ta có  $P(a, b, c)$  đạt min khi  $x \leq y = z$ . Do đó, ta cần chứng minh

$$f(x) + 2f(y) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{2x} + e^x + 1} + \frac{2}{e^{2y} + e^y + 1} \geq 1 \quad (*)$$

Với  $x, y \in \mathbf{R}$  thỏa  $x + 2y = 0$ .

Ta có

$$(*) \Leftrightarrow \frac{2}{m^2 + m + 1} + \frac{1}{\frac{1}{m^4} + \frac{1}{m^2} + 1} \geq 1 \quad (m = e^y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m^2 + m + 1} + \frac{m^4}{m^4 + m^2 + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m^2 + m + 1} + \frac{m^4}{(m^2 + m + 1)(m^2 - m + 1)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2 - m + 1) + m^4 \geq m^4 + m^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow (m - 1)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

Tóm lại, ta suy ra được

$$P(a, b, c) \geq 1$$

Để chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Trở lại bài toán của ta

Để chứng minh, thay  $a, b, c$  lần lượt bởi  $\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}$ , ta được

$$\frac{1}{\frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^2} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{b^4} + \frac{1}{b^2} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{c^4} + \frac{1}{c^2} + 1} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a^4 + a^2 + 1} + \frac{b^4}{b^4 + b^2 + 1} + \frac{c^4}{c^4 + c^2 + 1} \geq 1$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a^4+a^2+1} + \frac{b^2+1}{b^4+b^2+1} + \frac{c^2+1}{c^4+c^2+1} \leq 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1} + \frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1} + \frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1} \leq 4 \\
&\Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)} + \frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)} + \\
&\quad + \frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)} \leq 4 \\
&\Leftrightarrow \left( \sum_{cyc} \frac{1}{a^2-a+1} \right) + \left( \sum_{cyc} \frac{1}{a^2+a+1} \right) \leq 4 \quad (**).
\end{aligned}$$

Lại áp dụng Bất đẳng thức, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2+a+1} \geq 1$$

Nên từ (\*\*), ta suy ra

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2-a+1} \leq 3$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

## Bài tập.

### Bài 1. (VMEQ 2005)

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương cho trước và  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $ax + by + cz = xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z$$

### Bài 2. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \min\left\{2, \frac{3}{2^k}\right\} \forall k \geq 0$$

### Bài 3. (Crux mathematicorum)

Chứng minh rằng với mọi số không âm  $a, b, c$  ta có

$$\sqrt{1 + \frac{48a}{b+c}} + \sqrt{1 + \frac{48b}{c+a}} + \sqrt{1 + \frac{48c}{a+b}} \geq 15$$

### Bài 4.

Cho tam giác không tù  $ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{\cos^2 A}{\cos A + 1} + \frac{\cos^2 B}{\cos B + 1} + \frac{\cos^2 C}{\cos C + 1} \geq \frac{1}{2}$$

### Bài 5.

Cho các số thực không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \geq \sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \geq \frac{n}{1+r^2}$$

Bài 6.

Xét các số thực không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + \dots + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n}{1+r^2}$$

Bài 7.

Xét các số thực không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = p \leq \frac{1}{n-1}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+p}$$

Bài 8.

Xét các số thực không âm  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thỏa mãn

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} = p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{(1+x_2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+x_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Bài 9.

Cho tam giác  $ABC$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức

$$P = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C$$

$$Q = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C \quad (m, n, p \text{ là các số thực dương cho trước})$$

# CAI BAI TOAN CHON LOIC



## Bai toan 1. (Pham Kim Hung)

Cho  $a, b, c$  la cac so thuc khong am. Chong minh rang

$$\frac{ab}{a+4b+4c} + \frac{bc}{b+4c+4a} + \frac{ca}{c+4a+4b} \leq \frac{a+b+c}{9}$$

*Loi giai.*

\* Cach 1.

Ta coi bat nang thoi can chong minh tong nong voi

$$\begin{aligned} & 9 \sum_{cyc} ab(4a+4b+c)(4a+b+4c) \leq \\ & \leq (a+b+c)(4a+4b+c)(4a+b+4c)(a+4b+4c) \\ \Leftrightarrow & 4 \sum_{cyc} a^4 + 16 \sum_{cyc} ab^3 \geq 11 \sum_{cyc} a^3b + 3 \sum_{cyc} a^2b^2 + 6 \sum_{cyc} a^2bc \\ \Leftrightarrow & 4 \sum_{cyc} a^4 + 11(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) + 5 \sum_{cyc} ab^3 \geq 3 \sum_{cyc} a^2b^2 + 6 \sum_{cyc} a^2bc \end{aligned}$$

Khong mat tinh tong quat, giai so  $a = \min\{a, b, c\}$

Nat  $b = a + x, c = a + y$

Khi noi ta coi

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^4 &= 3a^4 + 4(x+y)a^3 + 6(x^2+y^2)a^2 + 4(x^3+y^3)a + x^4 + y^4 \\ \sum_{cyc} ab^3 &= 3a^4 + 4(x+y)a^3 + 3(x^2+y^2+xy)a^2 + (x^3+y^3+3xy^2)a + xy^3 \\ \sum_{cyc} a^2b^2 &= 3a^4 + 4(x+y)a^3 + 2(x^2+y^2+2xy)a^2 + 2(x^2y+xy^2)a + x^2y^2 \\ \sum_{cyc} a^2bc &= 3a^4 + 4(x+y)a^3 + (x^2+y^2+5xy)a^2 + (x^2y+xy^2)a \\ (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) &= -xy(x-y)(3a+x+y) \\ &= -3xy(x-y)a - x^3y + xy^3 \end{aligned}$$

Do nội bất năng thời cần chứng minh tổng không âm

$$27(x^2 + y^2 - xy)a^2 + (21x^3 + 21y^3 - 45x^2y + 36xy^2)a + 4x^4 + 4y^4 - 11x^3y - 3x^2y^2 + 16xy^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 27(x^2 + y^2 - xy)a^2 + (21x^3 + 21y^3 - 45x^2y + 36xy^2)a + (x - 2y)^2(4x^2 + 5xy + y^2) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 0, b = 2c$  và các hoán vị tổng.

\* Cách 2.

Ta có

$$\sum_{cyc} \left( \frac{3ab}{a+4b+4c} + b \right) = 4(a+b+c) \cdot \sum_{cyc} \frac{b}{a+4b+4c}$$

Do nội bất năng thời cần chứng minh tổng không âm

$$\frac{a}{4a+4b+c} + \frac{b}{4b+4c+a} + \frac{c}{4c+4a+b} \leq \frac{1}{3} \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a + b + c = 3$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{a}{4-c} + \frac{b}{4-a} + \frac{c}{4-b} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(4-a)(4-b) \leq (4-a)(4-b)(4-c) \\ &\Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4 \end{aligned}$$

Nhờ vậy, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần phải chứng minh

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4 \quad (**)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $b$  nằm giữa  $a$  và  $c$ .

Do đó

$$\begin{aligned} &c(a-b)(c-b) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow b^2c + c^2a \leq bc^2 + abc \\ &\Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq a^2b + bc^2 + 2abc = b(a+c)^2 \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2b(a+c)^2 = 2b.(a+c).(a+c) \leq \left( \frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3} \right)^2 = 8$$

$$\Rightarrow b(a+c)^2 \leq 4$$

Vậy

$$a^2b + b^2c + c^2a + abc \leq 4$$

$$\Rightarrow \text{npqm.}$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 0, b = 2c$  và các hoán vị tổng quát.

## Bài toán 2. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c$  là các số thực không âm thỏa mãn  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$36(ab + bc + ca) \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$$

*Lời giải.*

$$\text{Đặt } f(a, b, c) = 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$

Khi đó ta có

$$ab + bc + ca \geq a(b + c)$$

$$a^3 + (b + c)^3 \geq a^3 + b^3 + c^3 \geq 0$$

$$a^3(b + c)^3 = a^3b^3 + a^3c^3 + 3a^3b^2c + 3a^3bc^2 \geq a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a^3 + (b + c)^3)a^3(b + c)^3 \geq (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 36(ab + bc + ca) - (a^3 + b^3 + c^3)(a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) &\geq \\ &\geq 36a(b + c) - (a^3 + (b + c)^3)a^3(b + c)^3 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f(a, b + c, 0) \\ &= f(a, 3 - a, 0) \\ &= 36a(3 - a) - a^3(3 - a)^3(a^3 + (3 - a)^3) \\ &= 9a(3 - a)(a^2 - 3a + 2)^2(a(3 - a) + 1) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \geq 0 \text{ (hpcm)}$$

Những thời xảy ra khi và chỉ khi  $(a,b,c) = (2,1,0)$ .

### Bài toán 3. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a,b,c,d \geq 0$  thỏa mãn  $a+b+c+d = 4$ . Chứng minh rằng

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \geq d \geq 0$

\* Trường hợp 1.  $a \geq 3 \Rightarrow b+c+d \leq 1 \Rightarrow 0 \leq b \leq 1, 0 \leq c \leq \frac{1}{2}, 0 \leq d \leq \frac{1}{3}$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) - (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \geq \\ &\geq (1+a^4) - (1+a^3)(1+1^3) \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^3\right) \\ &= a^4 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} \\ &\geq 3a^3 - \frac{7}{3}a^3 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3}(a^3 - 2) > 0 \\ &\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \end{aligned}$$

\* Trường hợp 2.  $3 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$

Ta coi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} (2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)) \geq 0$$

Xét hàm số  $f(x) = 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) - x + 1$  với  $0 \leq x \leq 3$

Ta có

$$f'(x) = \frac{8x^3}{x^4+1} - \frac{6x^2}{x^3+1} - 1 = \frac{(x-1)(-x^6+x^5+x^4+7x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^3+1)}$$



Đặt  $f'(x) = 0$  chỉ có 2 nghiệm dương phân biệt là  $x_0 \in (2, 3)$ .

Qua 1 thì  $f'(x)$  đổi dấu từ âm sang dương, qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f(x) \geq \min\{f(1), f(3)\} = \min\{0, 2(\ln 41 - \ln 14 - 1)\} = 0 \quad \forall x \in [0, 3]$$

$$\Rightarrow 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) \geq x-1 \quad \forall x \in [0, 3]$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} (2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)) \geq \sum_{cyc} (a-1) = 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = 1$ .

\* Nhận xét.

Bằng cách làm hoán vị tổng đối, ta có kết quả sau

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa mãn  $a + b + c + d = 4$ . Khi đó ta có

$$(1+a^{k+1})(1+b^{k+1})(1+c^{k+1})(1+d^{k+1}) \geq (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k) \quad \forall k \geq 2.$$

+ Cách 2.

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp phản chứng.

Giải sử ngược lại tồn tại bốn số không âm  $(a, b, c, d)$  thỏa  $a + b + c + d = 4$  sao cho

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) < (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a \leq b \leq c \leq d$ .

Đặt  $F_k = (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k)$ . Thế thì theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$F_4 \cdot F_2 \geq F_3^2, F_3 \cdot F_1 \geq F_2^2, F_2 \cdot F_0 \geq F_1^2 \quad (1)$$

Theo giả thiết phản chứng thì

$$F_4 < F_3 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra ngược

$$F_4 < F_3 < F_2 < F_1 < F_0 = 16 \quad (3)$$

Từ (3), ta có  $d < 2$ .

Nếu ta đi từ trái sang phải với (3), ta sẽ chứng minh

$$F_3 \geq F_1 \quad (4)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (4) &\Leftrightarrow (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4} + \frac{(2a-1)^2}{4}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{(2b-1)^2}{4}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{(2c-1)^2}{4}\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{(2d-1)^2}{4}\right) \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \left(1 + \frac{(2a-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(2b-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(2c-1)^2}{3}\right) \left(1 + \frac{(2d-1)^2}{3}\right) \geq \left(\frac{4}{3}\right)^4 \\ &\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left(1 + \left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right)^4 \quad (5) \end{aligned}$$

Trong đó  $x = \frac{2a-1}{\sqrt{3}}, y = \frac{2b-1}{\sqrt{3}}, z = \frac{2c-1}{\sqrt{3}}, t = \frac{2d-1}{\sqrt{3}}$

Từ đó xét bất đẳng thức

$$\begin{aligned} (1+A^2)(1+B^2) &\geq \left(1 + \left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right)^2 \quad (6) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{8} \cdot (A-B)^2 (8 - A^2 - 6AB - B^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Ta thấy nếu  $A+B \leq 2$  thì bất đẳng thức trên đúng.

Từ  $a \leq b \leq c \leq d < 2$ , ta dễ dàng chứng minh được  $\begin{cases} x+t < 2 \\ y+z < 2 \end{cases}$ . Do đó theo (6), ta

có

$$\begin{aligned} (1+x^2)(1+t^2) &\geq \left(1 + \left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right)^2 \\ (1+y^2)(1+z^2) &\geq \left(1 + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right)^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[ \left( 1 + \left( \frac{x+t}{2} \right)^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{y+z}{2} \right)^2 \right) \right]^2$$

Tôi  $\begin{cases} x+t < 2 \\ y+z < 2 \end{cases}$  ta coi  $\frac{x+t}{2} + \frac{y+z}{2} < 2$ . Do ñoi theo (6), ta lai coi

$$\left( 1 + \left( \frac{x+t}{2} \right)^2 \right) \left( 1 + \left( \frac{y+z}{2} \right)^2 \right) \geq \left( 1 + \left( \frac{x+y+z+t}{4} \right)^2 \right)^2$$

Do ñoi

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left( 1 + \left( \frac{x+y+z+t}{4} \right)^2 \right)^4$$

$\Rightarrow$  (5) ñuïng

$\Rightarrow$  (4) ñuïng.

Tôi ñaây ñeñ mañ thuañ.

Vaây ta phai coi

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \text{ (ñpcm)}$$

Ñaïng thoi xaây ra khi vaøchæ khi  $a = b = c = d = 1$ .

\* Ghi chui

Ngoai 2 caách chöïng minh treñ, ta coiñ coiñmoät caách chöïng minh ñoä laøchöïng minh baø ñaïng thoi mañh hôn nhö sau

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thoi mañ  $a + b + c + d = 4$ . Khi ñoi ta coi

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

*Chöïng minh.*

Ta coiñbaø ñaïng thoi cañ chöïng minh töïng ñoïng voi

$$f(a, b, c, d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 0$$

Ta coiñNhañ xeñ sau

**Nhañ xeñ.** Neñ  $a + b \leq 2$  vaø  $a \geq x \geq b$  thì

$$f(a, b, c, d) \geq f(x, a+b-x, c, d)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} & f(a, b, c, d) - f(x, a+b-x, c, d) = \\ & = (a-x)(x-b)((c+1)(d+1) - (c^2+1)(d^2+1)(ab-x^2+ax+bx-2)) \end{aligned}$$

Tõõnày, sũidũng giãithiết, ta deãdang chũng minh nõõc

$$f(a, b, c, d) \geq f(x, a+b-x, c, d)$$

Nhãn xét nõõc chũng minh.

Trũilại bài toán cũa ta

Không mất tính tổng quát, ta cũithegiãisũi  $a \leq b \leq c \leq d$  vàñãt  $x = \frac{a+b+c}{3}$  theã

thì ta cũi  $a+c \leq 2$  và  $c \geq x \geq a$ . Do nõi theo Nhãn xét trên, ta cũi

$$f(a, b, c, d) \geq f(a+c-x, b, x, d) \quad (1)$$

Chũyũrãng  $x = \frac{(a+c-x)+b+x}{3}$  nếu nếu  $\begin{cases} x = \min\{x, b, a+c-x\} \\ x = \max\{x, b, a+c-x\} \end{cases}$  thì ta cũi  $x = b =$

$$= a+c-x \text{ nếu } f(a+c-x, b, x, d) = f(x, x, x, d)$$

Giãisũingũõc lại, khi nõicũi2 trũõng hũp xãy ra

$$b < x < a+c-x \quad (2)$$

$$b > x > a+c-x \quad (3)$$

Lại sũidũng Nhãn xét, ta nõõc

$$(2) \Rightarrow f(a+c-x, b, x, d) \geq f(x, a+b+c-2x, x, d) = f(x, x, x, d)$$

$$(3) \Rightarrow f(a+c-x, b, x, d) \geq f(a+b+c-2x, x, x, d) = f(x, x, x, d)$$

Tũm lại, trong mũi trũõng hũp, ta luũn cũi

$$\begin{aligned} & f(a+c-x, b, x, d) \geq f(x, x, x, d) \\ & \Rightarrow f(a, b, c, d) \geq f(x, x, x, d) \end{aligned} \quad (4)$$

Mãt khãc, ta cũi

$$\begin{aligned} & f(x, x, x, d) = \\ & = f\left(\frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, d\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{729} \cdot (d-1)^2 (d^6 - 22d^5 + 223d^4 - 1268d^3 + 4210d^2 - 7564d + 6364) \geq 0$$

Nein t0(4), ta suy ra ñoïc

$$f(a, b, c, d) \geq 0 \Rightarrow \text{ñpcm.}$$

#### Bai toán 4. (Pham Kim Hung)

Cho  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là các số thực đồng thời mãn

$$\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$$

Chöng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2 + n - 1} \leq 1$$

*Lời giải.*

Neu  $n = 1, n = 2$  thì bất ñáng thöc ña cho tröu thanh ñáng thöc.

Xét  $n \geq 3$

Ñặt  $y_i = \frac{1}{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) thì  $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}$ . Khi ñoù bất ñáng thöc cần chöng minh töng

ñöng với

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{(n-1)y_i^2 + 1} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1} &\geq 1 \end{aligned}$$

Giải söngöc lại  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1} < 1$ .

Ñặt  $a_i = \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) thì  $a_i > 0 \forall i = \overline{1, n}$ ,  $\sum_{i=1}^n a_i < 1$  và  $y_i = \sqrt{\frac{1-a_i}{(n-1)a_i}} \forall i = \overline{1, n}$

$$\text{Nhat } b_i = \frac{\sum_{j \neq i} a_j}{n-1} \quad \forall i = \overline{1, n}, a = \sum_{i=1}^n a_i$$

Ta coi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i < 1 &\Rightarrow 1 - a_i > \sum_{j \neq i} a_j = (n-1)b_i \quad \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow y_i = \sqrt{\frac{1-a_i}{(n-1)a_i}} > \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \quad \forall i = \overline{1, n} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n y_i > \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \end{aligned}$$

Ta chong minh

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \quad (*)$$

Thay vao, ta coi

$$\begin{aligned} \sqrt{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-1)b_i - (n-1)a_i}{\sqrt{a_i(n-1)b_i}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\sum_{j \neq i} a_j - (n-1)a_i}{\sqrt{a_i(a-a_i)}} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \left( \frac{1}{\sqrt{a_j(a-a_j)}} - \frac{1}{\sqrt{a_i(a-a_i)}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2 \cdot \sum_{k \neq i, k \neq j} a_k}{\sqrt{a_i a_j (a-a_i)(a-a_j)} \cdot (\sqrt{a_i(a-a_i)} + \sqrt{a_j(a-a_j)})} \\ &\geq 0 \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2 (a - a_i - a_j)}{\sqrt{a_i a_j (a-a_i)(a-a_j)} \cdot (\sqrt{a_i(a-a_i)} + \sqrt{a_j(a-a_j)})} \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \left( \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \right) \geq 0 \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \\ &\Rightarrow (*) \text{ nuing.} \end{aligned}$$

Vậy  $\sum_{i=1}^n y_i > \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} > \sum_{i=1}^n \frac{1}{y_i}$ . Điều này trái với giả thiết.

Vậy ta phải có  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1} \geq 1$  (hpcm).

### Bài toán 5. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\text{i. } 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \leq 8(a+b+c)^4$$

$$\text{ii. } 64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \leq (a+b+c)^6$$

*Lời giải.*

$$\text{i. } \text{Đặt } f(a, b, c) = 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

Trước hết ta chứng minh rằng

$$\begin{aligned} f\left(x, x, \frac{1}{x^2}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 8\left(2x + \frac{1}{x^2}\right)^4 - 81(1+x^2)^2\left(1 + \frac{1}{x^4}\right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 8(2x^3 + 1)^4 - 81x^4(1+x^2)^2(1+x^4) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2(47x^{10} + 94x^9 - 21x^8 + 120x^7 + & \\ + 99x^6 + 78x^5 + 87x^4 + 96x^3 + 24x^2 + 16x + 8) &\geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy

$$f\left(x, x, \frac{1}{x^2}\right) \geq 0 \quad (*)$$

Tiếp theo, không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c$ . Ta chứng minh

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) \\ \Leftrightarrow 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) &\geq \\ &\geq 8(2\sqrt{ab} + c)^4 - 81(1+ab)^2(1+c^2) \\ \Leftrightarrow 8(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \left( (a+b+c)^2 + (c+2\sqrt{ab})^2 \right) &\left( (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 + 2c \right) \geq \\ &\geq 81(a-b)^2(1+c^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 8\left((a+b+c)^2+(c+2\sqrt{ab})^2\right)\left((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+2c\right)-81(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(1+c^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\left((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+c-2\sqrt{ab}\right)^2+(c+2\sqrt{ab})^2\right)\left((\sqrt{a}+\sqrt{b})^2+2c\right)-81(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(1+c^2)\geq 0 \quad (**)$$

Đặt  $t = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \Rightarrow t \geq 4\sqrt{ab} \geq 4 \geq 4c$

Xét hàm số  $g(t) = 8\left(\left(t+c-2\sqrt{ab}\right)^2+(c+2\sqrt{ab})^2\right)(t+2c)-81t(1+c^2)$

Ta cần chứng minh  $g(t) \geq 0$

Ta có

$$g'(t) = 8\left(\left(t+c-2\sqrt{ab}\right)^2+(c+2\sqrt{ab})^2\right)+16(t+2c)(t+c-2\sqrt{ab})-81(1+c^2)$$

$$\geq 8\left(\left(4\sqrt{ab}+c-2\sqrt{ab}\right)^2+(c+2\sqrt{ab})^2\right)+16(4\sqrt{ab}+2c)(4\sqrt{ab}+c-2\sqrt{ab})-81(1+c^2)$$

$$= 3\left(16(c+2\sqrt{ab})^2-27(1+c^2)\right)$$

$$= 3(64ab-27+64c\sqrt{ab}-11c^2) \geq 0$$

$\Rightarrow g(t)$  đồng biến.

$$\Rightarrow g(t) \geq f(4\sqrt{ab}) = 4\left(8(c+2\sqrt{ab})^3-81(1+c^2)\sqrt{ab}\right)$$

$$= 4\left(8\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)^3-81t\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\right) \quad (t = \sqrt{ab} \geq 1)$$

$$= \frac{4(64t^9-81t^7+96t^6-33t^3+1)}{t^6} \geq 0 \quad \forall t \geq 1$$

$\Rightarrow g(t) \geq 0$

$\Rightarrow (**)$  đúng.

$$\Rightarrow f(a,b,c) \geq f(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, c) = f\left(\sqrt{ab}, \sqrt{ab}, \frac{1}{ab}\right) \geq 0 \quad (\text{do } (**))$$



$\Rightarrow$  đpcm.

ii. Trở lại xem những nhắc lại không chứng minh kết quả sau

Cho các số thực dương  $a, b, c$ . Khi nào tồn tại các số thực  $x_0, y_0, x_1, y_1$  ( $x_0, x_1, y_1 \geq 0$ )

sao cho

$$\begin{aligned}2x_0 + y_0 &= 2x_1 + y_1 = a + b + c \\x_0^2 + 2x_0y_0 &= x_1^2 + 2x_1y_1 = ab + bc + ca \\x_0^2y_0 &\leq abc \leq x_1^2y_1\end{aligned}$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}+ \text{ Nếu } (a + b + c)^2 &\geq 4(ab + bc + ca) \text{ thì } y_0 \leq 0 \\+ \text{ Nếu } (a + b + c)^2 &\leq 4(ab + bc + ca) \text{ thì } y_0 \geq 0\end{aligned}$$

Trở lại bài toán của ta

Ta cần biết những điều cần chứng minh tổng những vôi

$$\begin{aligned}64 \left( 1 + \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3 + a^3b^3c^3 \right) &\leq (a + b + c)^6 \\ \Leftrightarrow 64 \left( 2 + \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3 \right) &\leq (a + b + c)^6 \\ \Leftrightarrow 64 \left( 2a^2b^2c^2 + abc \sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3 \right) &\leq (a + b + c)^6\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $a + b + c = 1$ . Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc$ . Khi

những điều cần chứng minh tổng những vôi

$$\begin{aligned}2r^2 + r(1 - 3q + 3r) + q^3 - 3qr + 3r^2 &\leq \frac{1}{64} \\ \Leftrightarrow f(r) = 8r^2 + (1 - 6q)r + q^3 - \frac{1}{64} &\leq 0\end{aligned}$$

Ta cần

$$\begin{aligned}f'(r) &= 16r + 1 - 6q \\ f''(r) &= 16 > 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(r)$  là hàm lồi.

\* Trường hợp 1.  $4q \geq 1 \Rightarrow y_0 \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow f(r) \leq \max\{f(x_0^2 y_0), f(x_1^2 y_1)\}$$

Ta coi

$$\begin{aligned} f(x_0^2 y_0) &= \\ &= 8x_0^4 y_0^2 + (1 - 6(x_0^2 + 2x_0 y_0))x_0^2 y_0 + (x_0^2 + 2x_0 y_0)^3 - \frac{1}{64} \\ &= \frac{(2x_0 - 1)(1024x_0^5 - 368x_0^4 + 264x_0^3 - 60x_0^2 + 2x_0 + 1)}{64} \leq 0 \quad (\text{do } 0 \leq x_0 \leq \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có  $f(x_1^2 y_1) \leq 0$

$$\Rightarrow f(r) \leq 0 \quad (1)$$

\* Trường hợp 2.  $4q \leq 1$

$$\Rightarrow f(r) \leq \max\{f(0), f(x_1^2 y_1)\}$$

Theo trên, ta có  $f(x_1^2 y_1) \leq 0$

$$\text{Ta lại có } f(0) = q^3 - \frac{1}{64} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{64} = 0$$

$$\Rightarrow f(r) \leq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra đpcm.

### Bài toán 6. (Greece 2002)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{c^2 + 1} + \frac{c}{a^2 + 1} \geq \frac{3}{4} \cdot (a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c})^2$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b^2+1} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^3}{a^2b^2+a^2} \geq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{\sum_{\text{cyc}} (a^2+a^2b^2)} \\
&= \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{1+\sum_{\text{cyc}} a^2b^2} \\
&\geq \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{1+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)^2} \\
&= \frac{(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2}{1+\frac{1}{3}} \\
&= \frac{3}{4} \cdot (a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c})^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Bài toán 7. (Vasile Cirtoaje)

a) Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca) \left( \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \right) \geq \frac{9}{2}$$

b) Cho  $a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng

$$(ab+bc+cd+da) \left( \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+d)} + \frac{1}{d(d+a)} \right) \geq 8$$

*Lời giải.*

a) Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+a)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Do vậy ta cần chứng minh

$$2(ab+bc+ca) \geq 3\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)+b(c+a)+c(a+b) \geq 3\sqrt[3]{a(b+c).b(c+a).c(a+b)}$$

Nhieu này hiển nhiên đúng theo bất AM-GM.

$\Rightarrow$  đpcm.

b) Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{c(c+d)} \geq \frac{2}{\sqrt{ac(a+b)(c+d)}} \geq \frac{8}{(a+c)(a+b+c+d)}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{d(d+a)} \geq \frac{8}{(b+d)(a+b+c+d)}$$

Do đó

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+d)} + \frac{1}{d(d+a)} \geq \\ & \geq \frac{8}{(a+c)(a+b+c+d)} + \frac{8}{(b+d)(a+b+c+d)} \\ & = \frac{8}{(a+c)(b+d)} \\ & = \frac{8}{ab+bc+cd+da} \end{aligned}$$

Suy ra

$$(ab+bc+cd+da) \left( \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(b+c)} + \frac{1}{c(c+d)} + \frac{1}{d(d+a)} \right) \geq 8 \text{ (đpcm)}$$

### Bài toán 8. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc \geq 1$ . Chứng minh rằng

$$a^{\frac{a}{b}} \cdot b^{\frac{b}{c}} \cdot c^{\frac{c}{a}} \geq 1$$

*Lời giải.*

Do  $a, b, c > 0$  và  $abc \geq 1$  nên đặt  $a = ka', b = kb', c = kc'$  với  $k \geq 1, a', b', c' > 0$  và  $a'b'c' = 1$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$k^{\frac{a'}{b'} + \frac{b'}{c'} + \frac{c'}{a'}} \cdot a^{\frac{a'}{b'}} \cdot b^{\frac{b'}{c'}} \cdot c^{\frac{c'}{a'}} \geq 1$$

Do  $k \geq 1$  nên ta cần chứng minh

$$a^{\frac{a'}{b'}} \cdot b^{\frac{b'}{c'}} \cdot c^{\frac{c'}{a'}} \geq 1$$

Do nội không mất tính tổng quát coi thể giả sử  $abc = 1$ . Khi nội bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a \ln a}{b} + \frac{b \ln b}{c} + \frac{c \ln c}{a} \geq 0$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $a \geq b \geq c \Rightarrow \ln a \geq \ln b \geq \ln c$

$$+ \text{ Trường hợp 1.1. } 0 < b \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \geq \frac{b}{c} \geq \frac{c}{a}$$

$\Rightarrow$  Theo bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$\frac{a \ln a}{b} + \frac{b \ln b}{c} + \frac{c \ln c}{a} \geq \frac{1}{3} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) (\ln a + \ln b + \ln c) = 0$$

$$+ \text{ Trường hợp 1.2. } b \geq 1 \Rightarrow \ln b \geq 0$$

Ta coi bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a \ln a}{b} + \frac{b \ln b}{c} + \frac{c \ln c}{a} &\geq \ln a + \ln b + \ln c \\ \Leftrightarrow \frac{(a-b) \ln a}{b} + \frac{(b-c) \ln b}{c} + \frac{(c-a) \ln c}{a} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a-b) \left( \frac{\ln a}{b} - \frac{\ln c}{a} \right) + (b-c) \left( \frac{\ln b}{c} - \frac{\ln c}{a} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(a-b)(a \ln a - b \ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a \ln b - c \ln c)}{ac} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Chú ý rằng } a \geq b \geq c \text{ và } abc = 1 \text{ nên } c \leq 1 \text{ và } a \geq b \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln c \leq 0 \\ \ln a \geq \ln b \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \ln a - b \ln c \geq 0 \\ a \ln b - c \ln c \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)(a \ln a - b \ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a \ln b - c \ln c)}{ac} \geq 0$$

\* Trường hợp 2.  $a \leq b \leq c \Rightarrow c \geq 1 \geq a > 0$

Theo trên, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đồng với

$$\begin{aligned} & \frac{(a-b)(a \ln a - b \ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a \ln b - c \ln c)}{ac} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(b-a)(b \ln c - a \ln a)}{ab} + \frac{(c-b)(c \ln c - a \ln b)}{ac} \geq 0 \end{aligned}$$

Do  $a \leq b \leq c$  nên  $\ln a \leq \ln b \leq \ln c$  và  $\ln c \geq 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{cases} b \ln c - a \ln a \geq a \ln c - a \ln a = a(\ln c - \ln a) \geq 0 \\ c \ln c - a \ln b \geq a \ln c - a \ln b = a(\ln c - \ln b) \geq 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \frac{(b-a)(b \ln c - a \ln a)}{ab} + \frac{(c-b)(c \ln c - a \ln b)}{ac} \geq 0 \end{aligned}$$

Tóm lại, ta luôn có

$$\frac{a \ln a}{b} + \frac{b \ln b}{c} + \frac{c \ln c}{a} \geq 0 \quad (\text{ñpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Bài toán 9. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . chứng minh rằng với mọi  $k > 0$  thì

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + \dots + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min \left\{ 1, \frac{n}{2^k} \right\}$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Ta có Bổ đề sau

**Bổ đề**  $x_1, x_2, \dots, x_n$  là  $n$  số thực dương thỏa mãn

- i)  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$
- ii)  $x_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1, n}$
- iii)  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = C$

Cho  $f$  là một hàm trên  $(-\infty, +\infty)$  thỏa mãn  $f$  lõm trên  $(-\infty, c]$  và lõm trên  $[c, +\infty)$

$$\text{Đặt } F = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

Khi đó  $F$  đạt min khi  $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$ .

*Chứng minh.*

Giả sử  $x_1, x_2, \dots, x_i \in (-\infty, c]$ , do  $f$  lõm trên  $(-\infty, c]$  nên

$$f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_i) \geq (i-1)f(c) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_i - (i-1)c)$$

Mặt khác do  $f$  lõm trên  $[c, +\infty)$  nên

$$(i-1)f(c) + f(x_{i+1}) + f(x_{i+2}) + \dots + f(x_n) \geq (n-1)f\left(\frac{(i-1)c + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n}{n-1}\right)$$

Do đó

$$F = \sum_{k=1}^n f(x_k) \geq (n-1)f\left(\frac{(i-1)c + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n}{n-1}\right) + f(x_1 + x_2 + \dots + x_i - (i-1)c)$$

Để chứng minh điều này.

Trở lại bài toán của ta

Nếu  $n=1$  thì bất đẳng thức hiển nhiên đúng.

Nếu  $n=2$

+ Nếu  $0 < k < 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1$$

+ Nếu  $k \geq 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} = \frac{a_1^k + 1}{(a_1 + 1)^k} \geq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ (theo bất đẳng thức Holder)}$$

Xét  $n \geq 3$

Ta chứng minh bất đẳng thức đúng cho giá trị tối thiểu  $1 = \frac{n}{2^k} \Leftrightarrow k = \log_2 n$ .

Do  $n \geq 3$  nên  $n-1 > k > 1$ .

Khi đó

+  $\forall m \geq k$ , ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq \frac{1}{n^{\frac{m-1}{k}}} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} \right)^{\frac{m}{k}} \geq \frac{1}{n^{\frac{m-1}{k}}} \cdot \left( \frac{n}{2^k} \right)^{\frac{m}{k}} = \frac{n}{2^m}$$

+  $\forall m \leq k$ , ta có

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \right)^{\frac{k}{m}} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq 1$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ .

Nếu  $x_1 = \ln a_1, x_2 = \ln a_2, \dots, x_n = \ln a_n$  thì  $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \text{ (do } a_1 a_2 \dots a_n = 1) \end{cases}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^k}$

Ta có

$$f''(x) = \frac{ke^x \cdot (ke^x - 1)}{(e^x + 1)^{k+2}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln k$$

Tõõnõõ ta có  $f'$  lõõ trẽn  $(-\infty, -\ln k]$  và lõõ trẽn  $[-\ln k, +\infty)$

$\Rightarrow$  Theo Bõõ trẽn, ta có

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+a_i)^k} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+e^{x_i})^k} \text{ ñõõ min khi } x_1 \leq x_2 = x_3 = \dots = x_n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \min P &\geq \min \left\{ \frac{n-1}{(e^t + 1)^k} + \frac{1}{(e^{-(n-1)t} + 1)^k} \right\} \quad (t \geq 0) \\ &= \min \left\{ \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k} \right\} \quad (x = e^t \geq 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm min của hàm số  $g(x) = \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k}$  với  $x \geq 1$



Ta có  $g'(x) = (n-1)k \left( \frac{x^{(n-1)k-1}}{(x^{n-1}+1)^{k+1}} - \frac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^{(n-1)k-1} \cdot (x+1)^{k+1} = (x^{n-1}+1)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{(n-1)k-1}{k+1}} \cdot (x+1) = x^{n-1} + 1 \quad (2)$$

Đặt  $t = x^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow t \geq 1$ . Khi đó phương trình (2) trở thành

$$t^{(n-1)k-1} \cdot (t^{k+1} + 1) = t^{(n-1)(k+1)} + 1$$

$$\Leftrightarrow t^{(n-1)(k+1)} - t^{nk} - t^{(n-1)k-1} + 1 = 0$$

Xét hàm số  $h(t) = t^{(n-1)(k+1)} - t^{nk} - t^{(n-1)k-1} + 1$  với  $t \geq 1$

Ta có  $h'(t) = t^{(n-1)k-2} \cdot ((n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1)$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow (n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1 = 0$$

Xét tiếp hàm số  $m(t) = (n-1)(k+1)t^n - nkt^{k+1} - (n-1)k + 1$  với  $t \geq 1$

Ta có  $m'(t) = n(k+1)t^k \cdot ((n-1)t^{n-k-1} - k)$

Chú ý rằng  $n-1 > k$  nên  $m'(t) \geq n(k+1)t^k \cdot ((n-1) - k) > 0$

$\Rightarrow m(t)$  là hàm đồng biến trên  $[1, +\infty)$

Ta lại có  $m(1) = (n-1)(k+1) - nk - (n-1)k + 1 = n(1-k) < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = +\infty$

Nên phương trình  $m(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t_0 > 1$

$\Rightarrow$  Phương trình  $h'(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $t_0 > 1$

Bảng biến thiên của  $h(t)$

|         |   |       |           |
|---------|---|-------|-----------|
| $t$     | 1 | $t_0$ | $+\infty$ |
| $h'(t)$ | - | 0     | +         |
| $h(t)$  | 0 |       | $+\infty$ |

Cần có vào bảng biến thiên, ta có

$h(t) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt là 1 và  $t_1 > t_0 > 1$

Do mỗi  $g'(x) = 0$  có 2 nghiệm phân biệt là 1 và  $t_1^{k+1} > 1$ .

Bảng biến thiên của  $g(x)$

|         |   |             |           |   |
|---------|---|-------------|-----------|---|
| $x$     | 1 | $t_1^{k+1}$ | $+\infty$ |   |
| $g'(x)$ |   | +           | 0         | - |
| $g(x)$  | 1 | ↖ ↗         |           | 1 |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$g(x) \geq \min \left\{ g(1), \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \right\} = 1 \quad \forall x \geq 1 \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta suy ra đpcm.

+ **Case 2.**

Nhặt  $f(t) = \frac{1}{(t+1)^k}$

Ta có bảng sau

**Boàn** Nếu  $0 < a \leq b \leq c \leq d$  và  $ad = bc$  thì

$$f(a) + f(d) \geq \min \{ f(b) + f(c), 1 \}$$

**Chứng minh.**

Nhặt  $m = \sqrt{ad} = \sqrt{bc}$  và  $g(t) = f(mt) + f\left(\frac{m}{t}\right) = (mt+1)^{-k} + \left(\frac{m}{t}+1\right)^{-k}$  với mọi số

dương  $t$ . Nhặt  $t_1 = \frac{c}{m}, t_2 = \frac{d}{m}$ . Ta có  $1 \leq t_1 \leq t_2$ .

Nhà chứng minh Boàn ta cần chứng minh  $g(t_2) \geq \min \{ g(t_1), 1 \}$

Đã thấy  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1$ .

Xét tính đơn điệu của hàm  $g$  trên khoảng  $[1, +\infty)$ , ta có

$$g'(t) = mk \left( -(mt+1)^{-k-1} + \frac{1}{t^2} \cdot \left( \frac{m}{t} + 1 \right)^{-k-1} \right)$$

$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow (mt+1)^{k+1} > t^2 \cdot \left( \frac{m}{t} + 1 \right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow t^{\frac{2}{k+1}} - mt + mt^{\frac{1-k}{1+k}} - 1 < 0$$

Xét hàm số  $h(t) = t^{\frac{2}{k+1}} - mt + mt^{\frac{1-k}{1+k}} - 1$  với  $t \geq 1$ .

Ta có

$$h(1) = 0$$

$$h'(t) = \frac{2}{k+1} t^{\frac{k-1}{k+1}} - m + \frac{1-k}{1+k} mt^{\frac{-2k}{k+1}}$$

$$h'(1) = \frac{2k}{k+1} \cdot \left( \frac{1}{k} - m \right)$$

$$h''(t) = \frac{2(1-k)}{(1+k)^2} t^{\frac{1+3k}{1+k}} \cdot (t - mk)$$

Tùy thuộc vào các giá trị của  $m$  và  $k$ , ta có các trường hợp sau

\* **Trường hợp 1.**  $k=1, m \leq 1$ . Khi đó ta có  $h(t) = (1-m)(t-1) \geq 0 \quad \forall t > 1$ , do đó  $h \geq 0$  trên khoảng  $(1, +\infty)$ .

\* **Trường hợp 2.**  $k=1, m > 1$ . Khi đó ta có  $h(t) = (1-m)(t-1) < 0 \quad \forall t > 1$ , do đó  $h < 0$  trên khoảng  $(1, +\infty)$ .

\* **Trường hợp 3.**  $k < 1, m \leq \frac{1}{k}$ . Khi đó ta có  $h'' > 0 \quad \forall t > 1$ , vì  $h'(1) \geq 0$  và  $t > 1$ , nên  $h' > 0$  trên khoảng  $(1, +\infty)$ . Vì  $h(1) = 0$  nên  $h > 0$  trên khoảng  $(1, +\infty)$ .

\* **Trường hợp 4.**  $k < 1, m > \frac{1}{k}$ . Khi đó ta có  $h'(1) < 0$  và  $h'' < 0$  trên  $(1, mk)$ . Do

đó suy ra  $h' < 0$  trên  $(1, mk)$ . Vì  $h(1) = 0$  nên  $h < 0$  trên  $(1, mk]$ . Trên khoảng

$(mk, +\infty)$ , ta có  $h'' > 0$ , có nghĩa  $h$  là hàm lồi trên  $(mk, +\infty)$ . Vì  $h(mk) < 0$  và

$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(t) = +\infty$  nên tồn tại duy nhất một số thực  $p > 1$  sao cho  $h < 0$  trên  $(1, p)$  và  $h > 0$  trên  $(p, +\infty)$ .

Trong các trường hợp nói trên

+ Nếu  $h(t_2) \geq 0$  thì  $h \geq 0$  trên  $(t_2, +\infty)$ , tức là  $g' \leq 0$ . Suy ra hàm  $g$  nên giảm trên khoảng  $[t_2, +\infty)$  và  $g(t_2) \geq \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = 1$ .

+ Nếu  $h(t_2) \leq 0$  thì  $h \geq 0$  trên khoảng  $(1, t_2)$ , hay  $g' \geq 0$ . Vậy  $g$  là hàm nên tăng, suy ra  $g(t_1) \leq g(t_2)$ .

Bây giờ chúng ta chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức nào cho bằng quy nạp theo  $n$ .

Nếu  $n = 1$  thì bất đẳng thức nào cho trở thành bất đẳng thức.

Xét  $n \geq 2$ . Gọi  $m$  là trung bình nhân của  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thì ta có  $m = 1$ . Ta cần bất đẳng thức cần chứng minh tổng đồng với

$$f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq \min\{nf(m), 1\}$$

Nếu  $n = 2$  thì ta có  $\min\{2f(m), 1\} = \min\left\{\frac{1}{2^{k-1}}, 1\right\}$

+ Nếu  $0 < k < 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1$$

+ Nếu  $k \geq 1$  thì ta có

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} = \frac{a_1^k + 1}{(a_1 + 1)^k} \geq \frac{1}{2^{k-1}} \text{ (theo bất đẳng thức Holder)}$$

Vậy khẳng định đúng khi  $n = 2$ .

Giải sôù kháng ñình ñuïng cho số các biến bù ñôn  $n$  ( $n \geq 2$ ). Ta sẽ chứng minh kháng ñình ñuïng cho số biến bằng  $n$ . Để thấy rằng trong dãy  $a_1, a_2, \dots, a_n$  luôn chứa ít nhất một số không lớn hơn  $m$  và ít nhất một số không nhỏ hơn  $m$ . Không mất tính tổng quát, ta coi thể giải sôù  $a_1 \leq m \leq a_2$ .

$$\text{Ký hiệu } x_1 = \min \left\{ m, \frac{a_1 a_2}{m} \right\}, x_2 = \max \left\{ m, \frac{a_1 a_2}{m} \right\}.$$

Khi ñoù ta coi  $a_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq a_2$  và  $x_1 x_2 = a_1 a_2$ . Tóm lại, theo kết quả của bổ ñề trên, ta coi

$$f(a_1) + f(a_2) \geq \min \{ f(x_1) + f(x_2), 1 \} = \min \left\{ f(m) + f\left(\frac{a_1 a_2}{m}\right), 1 \right\}$$

Trung bình nhân của  $\frac{a_1 a_2}{m}, a_3, \dots, a_n$  cũng bằng  $m$  và số biến là  $n-1 < n$  nên theo

giả thiết quy nạp, ta coi

$$f\left(\frac{a_1 a_2}{m}\right) + f(a_3) + \dots + f(a_n) \geq \min \{ (n-1)f(m), 1 \}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} & f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq \\ & \geq \min \left\{ f(m) + f\left(\frac{a_1 a_2}{m}\right), 1 \right\} + f(a_3) + \dots + f(a_n) \\ & = \min \left\{ f(m) + f\left(\frac{a_1 a_2}{m}\right) + f(a_3) + \dots + f(a_n), 1 + f(a_3) + \dots + f(a_n) \right\} \\ & \geq \min \left\{ f(m) + f\left(\frac{a_1 a_2}{m}\right) + f(a_3) + \dots + f(a_n), 1 \right\} \\ & \geq \min \{ f(m) + \min \{ (n-1)f(m), 1 \}, 1 \} \\ & \geq \min \{ nf(m), 1 \} \\ & \Rightarrow f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n) \geq \min \{ nf(m), 1 \} \\ & \Rightarrow \text{kháng ñình ñuïng với số biến số bằng } n. \end{aligned}$$

Theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra khẳng định đúng với mọi  $n$ . Đây chính là điều ta cần phải chứng minh.

### Bài toán 10. (Moldova 1999)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{c(c+a)} + \frac{bc}{a(a+b)} + \frac{ca}{b(b+c)} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

*Lời giải.*

Đặt  $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$  thì ta có  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{ab}{c(c+a)} &= \sum_{cyc} \frac{\frac{b}{c}}{1 + \frac{c}{a}} = \sum_{cyc} \frac{y}{1+z} \\ \sum_{cyc} \frac{a}{c+a} &= \sum_{cyc} \frac{1}{1 + \frac{c}{a}} = \sum_{cyc} \frac{1}{1+z} \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x}{y+1} + \frac{y}{z+1} + \frac{z}{x+1} &\geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{x}{y+1} &\geq \frac{\sum_{cyc} (1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{x}{y+1} &\geq \frac{3 + 2\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy}{2 + \sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{x}{y+1} = \sum_{cyc} \frac{x^2}{x+xy} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} x\right)^2}{\sum_{cyc} (x+xy)} = \frac{\left(\sum_{cyc} x\right)^2}{\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy}$$

Do ñoï ñeàchöng minh bấ ñaíng thöïc ñaìcho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{\left(\sum_{cyc} x\right)^2}{\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy} \geq \frac{3 + 2\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy}{2 + \sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(2 + \sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy\right) \geq \left(\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy\right) \left(3 + 2\sum_{cyc} x + \sum_{cyc} xy\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} x\right)^3 + \left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 3\sum_{cyc} x + 3\sum_{cyc} xy + 3\left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} xy\right) + \left(\sum_{cyc} xy\right)^2$$

Söidüing bấ ñaíng thöïc AM-GM vaogiaithieä, ta deädaing chöng minh ñöôc caic bấ

ñaíng thöïc sau

$$\sum_{cyc} x \geq 3$$

$$\sum_{cyc} xy \geq 3$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} xy\right)$$

Do ñoï ta coi

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^3 = \left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} x\right)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} xy\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\sum_{cyc} x\right)^3 \geq 9\left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} xy\right) \quad (1)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(\sum_{cyc} xy\right) = \left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} x\right) \left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 9\sum_{cyc} x \quad (2)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 9\sum_{cyc} xy \quad (3)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 3\left(\sum_{cyc} xy\right)^2 \quad (4)$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2), (3) và (4) vế theo vế rồi chia cả hai vế cho 3, ta thu được

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^3 + \left(\sum_{cyc} x\right)^2 \left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 3\sum_{cyc} x + 3\sum_{cyc} xy + 3\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right) + \left(\sum_{cyc} xy\right)^2 \quad (\text{ñpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 1 \Leftrightarrow a = b = c$ .

### Bài toán 11.

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2} + \frac{(1-b^2)(1-c^2)}{(b-c)^2} + \frac{(1-c^2)(1-a^2)}{(c-a)^2} \geq -1$$

### Lời giải.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \left( \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2} + 1 \right) &\geq 2 \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{1-ab}{a-b} \right)^2 &\geq 2 \end{aligned} \quad (*)$$

Đặt  $x = \frac{1-ab}{a-b}, y = \frac{1-bc}{b-c}, z = \frac{1-ca}{c-a}$  thì ta có

$$\begin{aligned} (x+1)(y+1)(z+1) &= (x-1)(y-1)(z-1) \\ \Rightarrow xy + yz + zx &= -1 \end{aligned}$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq -2(xy + yz + zx) \\ &\Leftrightarrow (x + y + z)^2 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \\ &\Rightarrow \text{ñpcm.} \end{aligned}$$



## Bài toán 12.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2c+a} \geq 0$$

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát coi thế giới là số  $a = \max\{a, b, c\}$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $a \geq b \geq c$

Khi đó ta coi  $\begin{cases} 2a+b \geq 2b+c > 0 \\ 2a+b \geq 2c+a > 0 \end{cases}$ . Do đó

$$\frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2c+a} \geq \frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2a+b} = 0$$

\* Trường hợp 2.  $a \geq c \geq b$

Khi đó ta coi  $\begin{cases} 2c+a \geq 2b+c > 0 \\ 2a+b \geq 2b+c > 0 \end{cases}$ . Do đó

$$\frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2c+a} \geq \frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2b+c} = 0$$

Tóm lại, ta luôn có

$$\frac{\sqrt[3]{c} - \sqrt[3]{a}}{2a+b} + \frac{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}{2b+c} + \frac{\sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{c}}{2c+a} \geq 0 \quad (\text{hpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

\* Nhận xét.

Bằng cách làm hoán toàn tổng tử, ta có

$$\frac{c^n - a^n}{2a+b} + \frac{a^n - b^n}{2b+c} + \frac{b^n - c^n}{2c+a} \geq 0 \quad \forall a, b, c, n > 0$$

### Bài toán 13.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^n - b^n - c^n}{b^2 - bc + c^2} \geq 0$$

trong đó  $n > 0$  là hàng số cho trước.

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ .

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a^n - b^n) \left( \frac{2}{b^2 - bc + c^2} - \frac{1}{a^2 - ac + c^2} - \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \right) + (b^n - c^n) \left( \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{a^2 - ac + c^2} - \frac{2}{a^2 - ab + b^2} \right) \geq 0$$

$$\text{Do } a \geq b \geq c > 0 \text{ nên } \begin{cases} a^2 - ab + b^2 \geq b^2 - bc + c^2 > 0 \\ a^2 - ac + c^2 \geq b^2 - bc + c^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{b^2 - bc + c^2} - \frac{1}{a^2 - ac + c^2} - \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq 0$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{a^2 - ac + c^2} - \frac{2}{a^2 - ab + b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{b^2 - bc + c^2} - \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{1}{a^2 - ab + b^2} - \frac{1}{a^2 - ac + c^2} \\ \Leftrightarrow & (a - c)(a + c - b)(a^2 - ac + c^2) \geq (b - c)(a - b - c)(b^2 - bc + c^2) \end{aligned}$$

+ Nếu  $a \leq b + c$  thì ta có ngay đpcm.

$$\text{+ Nếu } a > b + c \text{ thì ta có } \begin{cases} a - c \geq b - c \geq 0 \\ a + c - b \geq a - b - c > 0 \\ a^2 - ac + c^2 \geq b^2 - bc + c^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (a - c)(a + c - b)(a^2 - ac + c^2) \geq (b - c)(a - b - c)(b^2 - bc + c^2)$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Những thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài toán 14. (Toán Học Tuổi Trẻ 2006)**

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là các số thực dương thỏa mãn  $\sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k i(i+1) \quad \forall k = \overline{1, n}$ . Chứng

minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n}{n+1}$$

**Lời giải.**

Trước hết, ta chứng minh bổ đề sau

**Bổ đề** Cho  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$ . Khi nối với hai dãy số thực  $(x_n)$  và  $(y_n)$ , ta có

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \sum_{j=1}^i y_j + x_n \cdot \sum_{i=1}^n y_i$$

**Chứng minh.**

Ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \sum_{j=1}^i y_j + x_n \cdot \sum_{i=1}^n y_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot \sum_{j=1}^i y_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} \cdot \sum_{j=1}^i y_j + x_n \cdot \sum_{i=1}^n y_i \\ &= x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i \cdot \sum_{j=1}^i y_j - \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1} \cdot \sum_{j=1}^i y_j - x_n \cdot \sum_{i=1}^{n-1} y_i + x_n \cdot \sum_{i=1}^n y_i \\ &= x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i \cdot \sum_{j=1}^i y_j - \sum_{i=2}^{n-1} x_i \cdot \sum_{j=1}^{i-1} y_j + x_n \cdot \left( \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \right) \\ &= x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i \cdot \left( \sum_{j=1}^i y_j - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \right) + x_n y_n \\ &= x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i y_i + x_n y_n \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

Vậy  $\sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i+1}) \cdot \sum_{j=1}^i y_j + x_n \cdot \sum_{i=1}^n y_i$ . Bây giờ ta sẽ chứng minh.

Trở lại bài toán của ta

+ Nếu  $n = 1$  thì hiển nhiên ta có  $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{2}$  (do giả thiết  $a_1 \leq 2$ ) (1)

+ Nếu  $n = 2$  thì theo giả thiết, ta có  $\begin{cases} a_1 \leq 2 \\ a_1 + a_2 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq 2 \\ a_2 \leq 8 - a_1 \end{cases}$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} &\geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{8 - a_1} \\ &= \frac{8}{a_1(8 - a_1)} \\ &= \frac{8}{-a_1^2 + 8a_1} \\ &= \frac{8}{-(a_1 - 2)^2 + 4a_1 + 4} \\ &\geq \frac{8}{4 \cdot 2 + 4} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2)$$

+ Nếu  $n \geq 3$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)^2}{\left(\frac{a_i}{i^2(i+1)^2}\right)} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2(i+1)^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2(i+1)^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức  $x_i = \frac{1}{i(i+1)}$ ;  $y_i = a_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ , ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2(i+1)^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^i a_j + \frac{1}{n^2(n+1)^2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i \\
&\leq \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^i j(j+1) + \frac{1}{n^2(n+1)^2} \cdot \sum_{i=1}^n i(i+1) \quad (\text{gt})
\end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức  $x_i = \frac{1}{i^2(i+1)^2}$ ,  $y_i = i(i+1) \forall i = 1, 2, \dots, n$ , ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2(i+1)^2} \cdot i(i+1) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \left( \frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2} \right) \cdot \sum_{j=1}^i j(j+1) + \frac{1}{n^2(n+1)^2} \cdot \sum_{i=1}^n i(i+1)
\end{aligned}$$

Do đó  $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2(i+1)^2} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{i^2(i+1)^2}} \geq \frac{n^2}{(n+1)^2} \cdot \left( \frac{n}{n+1} \right) = \frac{n}{n+1}$$

Vậy  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n}{n+1}$  (3)

Từ (1), (2) và (3), ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_i = i(i+1) \forall i = 1, 2, \dots, n$ .

\* Nhận xét.

Bằng cách làm hoán vị tổng tối, ta có kết quả sau

$(a_n), (b_n)$  là hai dãy số thực đồng thời mà  $\begin{cases} b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \\ \sum_{i=1}^k a_i \leq \sum_{i=1}^k b_i \quad \forall k = \overline{1, n} \end{cases}$

Khi đó ta có

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^n \frac{1}{b_i}$$

**Bài toán 15. (Phạm Kim Hưng)**

Cho  $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + 3$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$ . Ta cần tìm  $\min f$ .

Giải với bộ số  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  thỏa  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$  thì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$ .

Không mất tính tổng quát giải với  $0 < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ .

Ta chứng minh rằng nếu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$  thì  $x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1}$ .

Thật vậy, giả sử  $x_1 = x_2 = \dots = x_i$  ( $1 \leq i \leq n-3$ ). Ta chứng minh  $x_{i+1} = x_i = \dots = x_1$ .

Giải ngược lại  $x_{i+1} > x_i$ . Ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) &> f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, x_{i+2}, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{3n}{x_1 + \dots + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n} &> \frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_{i-1}} + \\ &+ \frac{2}{\sqrt{x_i x_{i+1}}} + \frac{1}{x_{i+2}} + \frac{1}{x_{i+3}} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{3n}{x_1 + \dots + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n} \\ \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}})^2}{x_i x_{i+1}} &> \frac{3n(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}})^2}{(x_1 + \dots + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n)(x_1 + \dots + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n)} \\ \Leftrightarrow (x_1 + \dots + x_i + x_{i+1} + \dots + x_n) &(x_1 + \dots + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n) > 3nx_i x_{i+1} \\ \Leftrightarrow (ix_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n) &((i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n) > 3nx_i x_{i+1} \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{cases} x_n \geq x_{n-1} \geq \dots \geq x_{i+1} > x_i = x_{i-1} = \dots = x_1 > 0 \\ 1 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \begin{cases} ix_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n \geq ix_i + (n-i)x_{i+1} > (n-i)x_{i+1} \geq 3x_{i+1} > 0 \\ (i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n > nx_i > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow (ix_i + x_{i+1} + x_{i+2} + \dots + x_n) \left( (i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + \dots + x_n \right) > 3nx_i x_{i+1} \end{aligned}$$

Vậy  $f(x_1, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) > f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, x_{i+2}, \dots, x_n)$ . Nếu nay vô lý

vì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$ . Vậy ta phải có  $x_{i+1} = x_i = \dots = x_1$ .

Bảng lập luận tương tự, ta sẽ thấy kết quả sau nếu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$  thì ta phải có  $x_{n-2} = x_{n-3} = \dots = x_1$ .

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $x_{n-1} = x_{n-2} = \dots = x_1$ .

Giải ngược lại  $x_{n-1} > x_{n-2}$

Khi này ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) &> f(x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, \sqrt{x_{n-2} x_{n-1}}, \sqrt{x_{n-2} x_{n-1}}, x_n) \\ &\Leftrightarrow ((n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \left( (n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2} x_{n-1}} + x_n \right) > 3nx_{n-2} x_{n-1} \end{aligned}$$

Do  $x_n \geq x_{n-1} > x_{n-2} = x_{n-3} = \dots = x_1 > 0$  nên

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq 2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2} > 0 \\ (n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2} x_{n-1}} + x_n > x_{n-1} + (n-1)x_{n-2} > 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow ((n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \left( (n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2} x_{n-1}} + x_n \right) > \\ &\quad > (2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2})(x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}) \end{aligned}$$

Do này ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} &(2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2})(x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}) > 3nx_{n-1} x_{n-2} \\ &\Leftrightarrow 2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1} x_{n-2} + (n^2 - 3n + 2)x_{n-2}^2 > 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy ta có  $f(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) > f(x_1, x_2, \dots, x_{n-3}, \sqrt{x_{n-2} x_{n-1}}, \sqrt{x_{n-2} x_{n-1}}, x_n)$ .

Nếu nay vô lý vì  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$ . Vậy ta phải có  $x_{n-1} = x_{n-2} = \dots = x_1$ .

Nhờ vậy, ta sẽ thấy kết quả

Nếu  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \min f$  thì  $x_n \geq x_{n-1} = x_{n-2} = \dots = x_1$ .

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \min f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq \\ &\geq \min f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}, \dots, \frac{1}{x}, x^{n-1}\right) \quad (x \geq 1) \\ &= \min \left\{ (n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{3nx}{x^n + n-1} \right\} \quad (x \geq 1) \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm min của hàm số  $g(x) = (n-1)x + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{3nx}{x^n + n-1}$  với  $x \geq 1$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{(n-1)(x^n - 1)(x^{2n} - (n+2)x^n + (n-1)^2)}{x^n(x^n + n-1)^2}$$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^{2n} + (n-1)^2 \geq 2(n-1)x^n \geq (n+2)x^n \quad (\text{do } n \geq 4)$$

$$\Rightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 1$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ ãng biến trên } [1, +\infty).$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(1) = n+3 \quad \forall x \geq 1 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra

$$\min f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq n+3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n+3 \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

+ **Cách 2.**

Ta sẽ chứng minh kết quả mạnh hơn như sau

Cho  $n$  số thực dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  thỏa  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Khi đó ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \geq n + \frac{k}{n}$$

Với  $k = 4(n-1)$  (nói riêng nếu  $n \geq 4$  thì  $k \geq 3n$ )

Ta sẽ chứng minh bằng đơn biến.  $n=1, n=2$  là các trường hợp tầm thường nên ở

đây ta sẽ không xét tới. Ta sẽ xét trường hợp  $n \geq 3$ .



Đặt  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{k}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} - n - \frac{k}{n}$

Ta coi nhận xét sau

(i) Nếu  $\begin{cases} a_1 \leq x \leq a_2 \\ a_1 a_2 \leq 1 \end{cases}$  thì

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, \dots, a_n\right)$$

(ii) Nếu  $(1 - a_1)(1 - a_2) \left[ k a_1 a_2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1 a_2 + 1 \right) \right] \geq 0$  thì

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_1 a_2, \dots, a_n)$$

Chứng minh nhận xét.

Để tiện việc trình bày xin nhớ ký hiệu  $A = \sum_{i=3}^n a_i$ .

(i) Ta coi

$$\begin{aligned} & f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, \dots, a_n\right) = \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{x} - \frac{x}{a_1 a_2} + \frac{k}{a_1 + a_2 + A} - \frac{k}{x + \frac{a_1 a_2}{x} + A} \\ &= \frac{(x - a_1)(a_2 - x) \left[ (a_1 + a_2 + A) \left( x + \frac{a_1 a_2}{x} + A \right) - k a_1 a_2 \right]}{a_1 a_2 (a_1 + a_2 + A)(x^2 + Ax + a_1 a_2)} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta coi

$$(a_1 + a_2 + A) \left( x + \frac{a_1 a_2}{x} + A \right) \geq n^2 \geq 4(n - 1) = k \geq k a_1 a_2$$

Do ão

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f\left(x, \frac{a_1 a_2}{x}, \dots, a_n\right)$$

(i) ão chứng minh.

(ii) Khai triển tổng tử nhỏ trên, ta có

$$\begin{aligned} f(a_1, a_2, \dots, a_n) - f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n) &= \\ &= \frac{(1-a_1)(1-a_2)[(a_1+a_2+A)(1+a_1 a_2+A) - ka_1 a_2]}{a_1 a_2 (a_1+a_2+A)(1+A+a_1 a_2)} \\ &\geq 0 \\ \Rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) &\geq f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n) \end{aligned}$$

(ii) nữa chứng minh.

Nhận xét nữa chứng minh hoàn toàn. Lưu ý rằng các biến  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bình đẳng nên  $a_1, a_2$  trong Nhận xét có thể thay bằng  $a_i, a_j$  ( $i \neq j$ ) tùy ý

Trở lại bài toán của ta

Ta sẽ chứng minh rằng luôn có thể đưa về trường hợp trong  $n$  biến có  $n-1$  biến không lớn hơn 1.

Thật vậy, giả sử trong  $n$  biến có nhiều hơn 1 biến lớn hơn 1, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử là  $a_1, a_2$ . Xét 2 trường hợp

\* Trường hợp 1.  $ka_1 a_2 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1 a_2 + 1 \right)$ . Khi này theo Nhận xét (ii), ta

có

$$f(a_1, a_2, \dots, a_n) \geq f(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n)$$

Nhờ vậy, ta có thể thay bỏ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bởi số  $(1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n)$  nếu  $f$  không tăng. Khi này số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1.

\* Trường hợp 2.  $ka_1 a_2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=3}^n a_i + a_1 a_2 + 1 \right)$ .

Khi này với mỗi  $a_j < 1 \leq a_2$  ( $a_j$  luôn tồn tại vì  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ ) ta nếu có

$$ka_1 a_j \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i \neq 1, i \neq j} a_i + a_1 a_j + 1 \right)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i \neq 1, i \neq j} a_i + a_1 a_j + 1}{ka_1 a_j} &= \frac{\sum_{i=1}^n a_i + a_1 a_j + 1 - a_1 - a_j}{ka_1 a_j} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i + 1 - a_1 - a_j}{ka_1 a_j} + 1 \\
&\geq \frac{\sum_{i=1}^n a_i + 1 - a_1 - a_2}{ka_1 a_2} + 1 \\
&= \frac{\sum_{i=3}^n a_i + a_1 a_2 + 1}{ka_1 a_2} \\
\Rightarrow ka_1 a_j &\leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i \neq 1, i \neq j} a_i + a_1 a_j + 1 \right)
\end{aligned}$$

Do ño ñ  $(1 - a_1)(1 - a_j) \left[ ka_1 a_j - \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i \neq 1, i \neq j} a_i + a_1 a_j + 1 \right) \right] \geq 0$ . Söu ñung Nhãn xét

(ii), ta coi the ñ thay bö số ñ  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  böi bö số ñ  $(1, a_2, \dots, a_1 a_j, \dots, a_n)$  ñe ñ  $f$  không tăng. Khi ño số biến bằng 1 cũng tăng lên ít nhất là 1.

Toàn lại, nếu vẫn còn 2 biến lớn hơn 1 thì ta luôn coi the ñ thay bö số ñ tăng xét böi một bö số khác mà số biến bằng 1 tăng lên ít nhất là 1 ñe ñ  $f$  không tăng. Việc thay thế này ch ñ coi the ñ öc thực hiện không quá  $n$  lần (vì coi không quá  $n$  bằng 1). Do ño ñ sau một số böc hữu hạn (không quá  $n$ ), ta sẽ ñöa bài toán về trường hợp trong  $n$  biến coi  $n - 1$  biến không lớn hơn 1.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh coi the ñ thay  $n - 1$  biến không lớn hơn 1 böi trung bình nhân của chúng. Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử ñ  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq 1$ .

Ñặt  $x = \sqrt[n-1]{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \leq 1$ . Nếu  $a_1 = x \vee a_{n-1} = x$  thì  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = x$ . Nếu tồn tại  $a_j$  ( $1 < j < n - 1$ ) sao cho  $a_j \neq x$  thì ta coi  $a_1 < x < a_{n-1}$ . Söu ñung Nhãn xét (i), ta

có thể thay bộ số  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  bởi bộ số  $\left(x, a_2, \dots, \frac{a_1 a_{n-1}}{x}, a_n\right)$  nếu  $f$  không tăng.

Khi nội số biến bằng  $x$  tăng lên ít nhất là 1. Ta cũng chú ý rằng  $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \leq \frac{a_1}{x} \leq 1$

nếu việc thay nhỏ trên vẫn nằm trong  $n$  biến còn  $n-1$  biến không lớn hơn 1, nên nhiều lần cho phép việc thay thế nhỏ trên có thể thực hiện liên tiếp. Tuy nhiên, việc thay thế này chỉ có thể thực hiện không quá  $n$  lần (vì chỉ có thể thay  $n$  biến bằng  $x$ ). Do nội số sau mỗi số lần thay (không quá  $n$ ), ta nữa có thể về trường hợp trong  $n$  biến còn  $n-1$  biến không lớn hơn 1 bằng nhau.

Cuối cùng, để chứng minh bất đẳng thức nào cho, ta cần chứng minh

$$f\left(x, x, \dots, \frac{1}{x^{n-1}}\right) \geq 0 \quad (0 < x \leq 1)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{nx + \frac{1}{x^{n-1}}} - n - \frac{k}{n} \geq 0 \quad (0 < x \leq 1)$$

Ta có

$$g'(x) = \frac{(n-1)(x^n - 1)}{x^2} \cdot \left(\frac{(n-1)x^n - 1}{(n-1)x^n + 1}\right)^2 \leq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow g(x) \text{ nghịch biến trên } (0, 1].$$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(1) = 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

### Bài toán 16.

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$  thỏa  $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(a-2b)^2 + (a-2c)^2}{(b-c)^2} + \frac{(b-2c)^2 + (b-2a)^2}{(c-a)^2} + \frac{(c-2a)^2 + (c-2b)^2}{(a-b)^2} \geq 22$$

### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-2b)^2 + (a-2c)^2}{(b-c)^2} \geq 22 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 - 4(b+c)a + 4b^2 + 4c^2}{(b-c)^2} \geq 22 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 - 2(b+c)a + 2b^2 + 2c^2}{(b-c)^2} \geq 11 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 - 2(b+c)a + (b+c)^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2} \geq 11 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{b+c-a}{b-c} \right)^2 \geq 8 \end{aligned}$$

Đặt  $x = \frac{b+c-a}{b-c}, y = \frac{c+a-b}{c-a}, z = \frac{a+b-c}{a-b}$  thì ta có

$$\begin{aligned} (x-2)(y-2)(z-2) &= (x+2)(y+2)(z+2) \\ \Rightarrow xy + yz + zx &= -4 \end{aligned}$$

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &\geq 8 \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 &\geq -2(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^2 &\geq 0 \text{ (đúng)} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Bài toán 17. (APMO 2005)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 8$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \geq \frac{2}{2+x^2} \quad \forall x > 0 \quad (*)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow (2+x^2)^2 \geq 4(1+x^3) \\ &\Leftrightarrow x^2(x-2)^2 \geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy (\*) đúng.

Do đó

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \geq \sum_{cyc} \frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} = \frac{2S(a,b,c)}{36+S(a,b,c)} = \frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}}$$

trong đó  $S(a,b,c) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 12 \\ a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 &\geq 3\sqrt[3]{(abc)^4} = 48 \\ \Rightarrow S(a,b,c) &\geq 72 \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} &\geq \frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}} \geq \frac{2}{1+\frac{36}{72}} = \frac{4}{3} \\ &\Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 2$ .

### Bài toán 18. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{3b^2 + 3c^2 - 2bc} + \frac{b^2}{3c^2 + 3a^2 - 2ca} + \frac{c^2}{3a^2 + 3b^2 - 2ab} \geq \frac{2}{3}$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{3b^2 + 3c^2 - 2bc} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^2(3b^2 + 3c^2 - 2bc)} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} a^2(3b^2 + 3c^2 - 2bc)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c)} \end{aligned}$$

Do nội ñ chöng minh bất ñ đẳng thức ñ cho, ta chæ cần chöng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{6(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a+b+c)} &\geq \frac{2}{3} \\ \Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq 12(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 4abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow 3[a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] + abc(a+b+c) &\geq 0 \end{aligned}$$

Theo bất ñ đẳng thức Schur thì

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) &\geq \sum_{\text{cyc}} ab(a^2 + b^2) \\ &\geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \text{ (theo AM-GM)} \end{aligned}$$

Vây ta có

$$\begin{aligned} 3[a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] + abc(a+b+c) &\geq 0 \\ \Rightarrow \text{ñpcm.} \end{aligned}$$

Ñ đẳng thức xảy ra khi và chæ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

### Bài toán 18. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^2}{a^2 - ab + b^2} \geq 2$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^2(b^2 - bc + c^2)} \\ &\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{\sum_{\text{cyc}} a^2(b^2 - bc + c^2)} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - abc(a + b + c)} \end{aligned}$$

Do nội nội chứng minh bất đẳng thức này cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - abc(a + b + c)} &\geq 2 \\ \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 &\geq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 2abc(a + b + c) \\ \Leftrightarrow [a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] + abc(a + b + c) &\geq 0 \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Schur thì

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) &\geq \sum_{\text{cyc}} ab(a^2 + b^2) \\ &\geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \quad (\text{theo AM-GM}) \end{aligned}$$

Vậy ta có

$$\begin{aligned} [a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] + abc(a + b + c) &\geq 0 \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).



+ Cách 2.

Không mất tính tổng quát coi thể giả sử  $0 \leq a \leq b \leq c$ .

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} a^2 - ac \leq 0 \\ a^2 - ab \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq c^2 - ca + a^2 \leq c^2 \\ 0 \leq a^2 - ab + b^2 \leq b^2 \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^2}{a^2 - ab + b^2} &\geq \frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \\ &\geq \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \geq 2 \text{ (theo AM-GM)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

**Bài toán 19. (VMO 2004)**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \leq \sqrt{3}$$

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát coi thể giả sử  $x \geq y \geq z > 0$

$$\Rightarrow 0 \leq x - y \leq x + y - 2z = 1 - 3z$$

Ta sẽ chứng minh

$$\sqrt{x+u^2} + \sqrt{y+v^2} \leq \sqrt{2(x+y) + (u+v)^2} \quad (*)$$

$$\text{trong đó } u = \frac{y-z}{\sqrt{12}}, v = \frac{x-z}{\sqrt{12}}$$

Thật vậy

$$(*) \Leftrightarrow x + y + 2uv \geq 2\sqrt{(x+u^2)(y+v^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 4(u-v)(xv-yu) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - \frac{1}{3} \cdot (x-y)^2 (x+y-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 (3+z-x-y) \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy (\*) đúng. Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} &\leq \sqrt{2(x+y) + \frac{(x+y-2z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \\ &\leq \sqrt{2(x+y) + \frac{(x+y-2z)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(1-3z)^2}{12}} = \sqrt{3} \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ .

### Bài toán 20.

Cho  $x, y, z \geq 0$  thỏa  $x + y + z = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x, y, z) = x^n y + y^n z + z^n x$$

trong đó  $n \geq 2, n \in \mathbb{R}$  là hằng số cho trước.

#### Lời giải.

Giả sử với bộ số  $(x_0, y_0, z_0)$  thì  $f(x_0, y_0, z_0) = \max f$ .

Không mất tính tổng quát có thể giả sử  $x_0 = \max\{x_0, y_0, z_0\}$ .

Khi đó nếu  $y_0 \leq z_0$  thì ta có

$$f(x_0, z_0, y_0) - f(x_0, y_0, z_0) = (z_0 - y_0)x_0^n + (y_0^n - z_0^n)x_0 + y_0 z_0^n - y_0^n z_0 = g(x_0)$$

Ta có

$$g'(x_0) = n(z_0 - y_0)x_0^{n-1} + y_0^n - z_0^n \geq n(z_0 - y_0)z_0^{n-1} + y_0^n - z_0^n = (n-1)(z_0^n - y_0^n) \geq 0$$

$\Rightarrow g(x_0)$  không biến.

$$\Rightarrow g(x_0) \geq g(z_0) = 0$$

$$\Rightarrow f(x_0, z_0, y_0) \geq f(x_0, y_0, z_0)$$

Do đó không mất tính tổng quát, ta xét  $x \geq y \geq z \geq 0$  là đúng

Theo bất đẳng thức Bernoulli, ta có

$$(x+z)^n = x^n \cdot \left(1 + \frac{z}{x}\right)^n \geq x^n \cdot \left(1 + \frac{nz}{x}\right) = x^n + nx^{n-1}z \geq 0$$

Do ñoù ta coi

$$\begin{aligned} f(x+z, y, 0) &= (x+z)^n y \\ &\geq (x^n + nx^{n-1}z)y \\ &\geq (x^n + 2x^{n-1}z)y \quad (\text{do } n \geq 2) \\ &= x^n y + x^{n-1}yz + x^{n-1}yz \\ &\geq x^n y + y^n z + z^n x \quad (\text{do } x \geq y \geq z \geq 0) \\ &= f(x, y, z) \end{aligned}$$

Ta lai coi

$$\begin{aligned} f(x+z, y, 0) &= (x+z)^n y \\ &= (1-y)^n y \\ &= \frac{1}{n} \cdot (ny) \cdot (1-y)^n \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{ny + n(1-y)}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

Do ñoù

$$f(x, y, z) \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ñang thoi xay ra chang han khi  $x = \frac{n}{n+1}, y = \frac{1}{n+1}, z = 0$ .

Ket luan

$$\max f = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Bài toán 21. (Voi Quốc Bài Căn)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{b\sqrt{ab} + 2} + \frac{b}{c\sqrt{bc} + 2} + \frac{c}{a\sqrt{ca} + 2}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\begin{aligned} 2P &= \sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{b\sqrt{ab} + 2} = \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{2a}{b\sqrt{ab} + 2} - a \right) + \sum_{\text{cyc}} a \\ &= 3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^{3/2}b^{3/2}}{a^{1/2}b^{3/2} + 2} \\ &\geq 3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^{3/2}b^{3/2}}{3\sqrt[3]{a^{1/2}b^{3/2}}} \quad (\text{theo bđt AM-GM}) \\ &= 3 - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} a^{4/3}b \\ &\geq 3 - \frac{1}{3} \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + 2ab + 3a^{4/3}b^{4/3}}{6} \quad (\text{theo bđt AM-GM}) \\ &= 3 - \frac{1}{18} \sum_{\text{cyc}} (a^2 + 2ab) - \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} a^{4/3}b^{4/3} \\ &= 3 - \frac{1}{18} (a + b + c)^2 - \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} a^{4/3}b^{4/3} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} a^{4/3}b^{4/3} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} ab \cdot a^{1/3}b^{1/3} \\ &\geq \frac{5}{2} - \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a + b + 1)}{3} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{18} \sum_{\text{cyc}} ab(4 - c) \\ &= \frac{5}{2} - \frac{1}{18} (4(ab + bc + ca) - 3abc) \end{aligned}$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có

$$\begin{aligned}
a^3 + b^3 + c^3 + 3abc &\geq \sum_{cyc} ab(a+b) \\
\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3\sum_{cyc} ab(a+b) + 6abc &\geq 4\sum_{cyc} ab(a+b) + 3abc \\
\Leftrightarrow (a+b+c)^3 &\geq 4\sum_{cyc} ab(a+b) + 3abc \\
\Leftrightarrow 27 &\geq 4\sum_{cyc} ab(3-c) + 3abc \\
\Leftrightarrow 27 &\geq 12(ab+bc+ca) - 9abc \\
\Rightarrow 4(ab+bc+ca) - 3abc &\leq 9 \\
\Rightarrow 2P &\geq \frac{5}{2} - \frac{1}{18} \cdot (4(ab+bc+ca) - 3abc) \geq \frac{5}{2} - \frac{1}{18} \cdot 9 = 2 \\
\Rightarrow P &\geq 1
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Vậy  $\min P = 1$ .

### Bài toán 22. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$27 + \left( \frac{b^2c^2}{a^4} + 2 \right) \left( \frac{c^2a^2}{b^4} + 2 \right) \left( \frac{a^2b^2}{c^4} + 2 \right) \geq 36 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

*Lời giải.*

Ta coi Boolean sau

Boolean  $x, y, z > 0$ . Khi đó ta coi

$$(x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) \geq 9(xy + yz + zx)$$

*Chứng minh.*

Theo nguyên lý Dirichlet, ta coi trong 3 số  $x^2 - 1, y^2 - 1$  và  $z^2 - 1$  luôn tồn tại ít nhất 2 số cùng dấu. Không mất tính tổng quát coi thể giá số  $x^2 - 1$  và  $y^2 - 1$  cùng dấu.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow (x^2 - 1)(y^2 - 1) &\geq 0 \\
\Rightarrow x^2y^2 &\geq x^2 + y^2 - 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 + 2x^2 + 2y^2 + 4 \geq 3(x^2 + y^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(y^2 + 2) \geq 3(x^2 + y^2 + 1)$$

Do ñoøi

$$\begin{aligned} (x^2 + 2)(y^2 + 2)(z^2 + 2) &\geq 3(x^2 + y^2 + 1)(z^2 + 2) \\ &= 3(x^2 + y^2 + 1)(1 + 1 + z^2) \\ &\geq 3(x + y + z)^2 \text{ (theo bñt Bunhiacopxki)} \\ &\geq 9(xy + yz + zx) \end{aligned}$$

Boã ñeà ñoøic chøng minh hoan toan.

Ñang thøic xay ra khi vaø chæ khi  $x = y = z = 1$ .

Trøulai bai toan cuøa ta

Ap dụng Boã ñeà ñoøic trên vøi  $x = \frac{bc}{a^2}, y = \frac{ca}{b^2}, z = \frac{ab}{c^2}$ , ta coi

$$\left( \frac{b^2 c^2}{a^4} + 2 \right) \left( \frac{c^2 a^2}{b^4} + 2 \right) \left( \frac{a^2 b^2}{c^4} + 2 \right) \geq 9 \left( \frac{bc}{a^2} \cdot \frac{ca}{b^2} + \frac{ca}{b^2} \cdot \frac{ab}{c^2} + \frac{ab}{c^2} \cdot \frac{bc}{a^2} \right) = \frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{abc}$$

Do ñoøi ta chæ can chøng minh

$$\begin{aligned} 27 + \frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{abc} &\geq 36 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \\ \Leftrightarrow 3 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} &\geq 4 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \end{aligned}$$

Chuyừrang

$$\begin{aligned} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} &= \frac{(a+b+c) \cdot \sum_{cyc} (a-b)^2}{2abc} + 3 \\ 2 \left( \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) &= \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} + 3 \end{aligned}$$

Do ñoøi

$$3 + \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} - 4 \cdot \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} =$$

$$\begin{aligned}
&= 3+3+\frac{(a+b+c)\cdot\sum_{cyc}(a-b)^2}{2abc}-2\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+3\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2((a+b+c)(a+c)(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)} \\
&\geq \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2((a+c)^2(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)} \\
&\geq \frac{1}{2}\cdot\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(4ac(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)} \text{ (theo bñt AM-GM)} \\
&= 2\cdot\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{b(a+c)(b+c)} \\
&\geq 0 \\
&\Rightarrow 3+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) \\
&\Rightarrow \text{ñpcm.}
\end{aligned}$$

Ñáng thóc xảy ra khi và chæ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 23. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $0 \leq x, y, z \leq \frac{1}{2}$  thóa  $x + y + z = 1$ . Chöng minh rang

$$\frac{1}{4} \leq x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz \leq \frac{9}{32}$$

*Löi giải.*

Tröïc hết, ta chöng minh

$$\begin{aligned}
&x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz \geq \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow 4x^3 + 4y^3 + 4z^3 + 16xyz \geq (x + y + z)^3 \\
&\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 + \frac{10}{3}xyz \geq \sum_{cyc} xy(x + y) \quad (*)
\end{aligned}$$

Theo bñt Schur thì

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq \sum_{cyc} xy(x + y)$$

$\Rightarrow (*)$  ñúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz \leq \frac{9}{32}$$

$$\Leftrightarrow 3(xy + yz + zx) - 7xyz \geq \frac{23}{32}$$

$$\Leftrightarrow 3x(y + z) + yz(3 - 7x) \geq \frac{23}{32}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $x \geq y \geq z \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{7} \Rightarrow 0 \leq z \leq y \leq \frac{3}{7}$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{7} - y\right)\left(\frac{3}{7} - z\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow yz \geq -\frac{9}{49} + \frac{3}{7}(y + z) = -\frac{9}{49} + \frac{3}{7}(1 - x) = \frac{12}{49} - \frac{3}{7}x$$

Do ñó

$$3x(y + z) + (3 - 7x)yz \geq 3x(1 - x) + (3 - 7x)\left(\frac{12}{49} - \frac{3}{7}x\right) = \frac{36}{49} > \frac{23}{32}$$

\* Trường hợp 2.  $\frac{3}{7} \leq x \leq \frac{1}{2}$ . Khi ñó ta coi

$$3x(y + z) + (3 - 7x)yz \geq 3x(1 - x) + \frac{1}{4}(y + z)^2(3 - 7x) \quad (\text{theo bñt AM-GM})$$

$$= 3x(1 - x) + \frac{1}{4}(1 - x)^2(3 - 7x)$$

$$= \frac{1}{32}(1 - 2x)(28x^2 - 6x + 1) + \frac{23}{32} \geq \frac{23}{32} \quad (\text{do } x \leq \frac{1}{2})$$

Tóm lại, ta luôn có

$$\frac{1}{4} \leq x^3 + y^3 + z^3 + 4xyz \leq \frac{9}{32} \quad (\text{ñpcm})$$



### Bài toán 24. (Jack Grafunkel)

Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi  $x, y, z \geq 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq k\sqrt{x+y+z}$$

*Lời giải.*

Ta sẽ chứng minh bất đẳng thức này cho đúng khi  $k = \frac{5}{4}$ . Đây chính là hằng số tối

nhất của bất đẳng thức này cho vì ta có bất đẳng thức xảy ra khi  $x = 0, y = 3, z = 1$ .

Nếu  $x + y = c^2, y + z = a^2, z + x = b^2$  ( $a, b, c \geq 0$ )  $\Rightarrow a^2, b^2, c^2$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{c} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b} \leq \frac{5}{2\sqrt{2}} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a \geq b, c$ .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\frac{a + \sqrt{b^2 + c^2}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Do nội hàm chứng minh (1), ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{c} + \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b} &\leq \frac{5}{4} \cdot (a + \sqrt{b^2 + c^2}) \\ \Leftrightarrow a + b + c + \frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)}{abc} &\leq \frac{5}{4} \cdot (a + \sqrt{b^2 + c^2}) \\ \Leftrightarrow 4abc(a+b+c) + 4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) &\leq 5abc(a + \sqrt{b^2 + c^2}) \end{aligned}$$

Từ đây suy ra không mất tính tổng quát, ta cần xét trường hợp  $a \geq c \geq b$  là như

Ta có

$$4abc(a+b+c) + 4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \leq 5abc(a + \sqrt{b^2 + c^2})$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 4a^3(c-b) - a^2bc + 4bc(c^2 - b^2) + \\ + a(4b^3 + 4b^2c + 4bc^2 - 4c^3 - 5bc\sqrt{b^2 + c^2}) \leq 0$$

Do  $a^2, b^2, c^2$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến) nên ta có  $a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$ . Do đó ta cần chứng minh  $f(a) \leq 0$  với  $b \leq c \leq a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$  (2).

+ Nếu  $b = c$  thì

$$f(a) = -ab^2 \left[ (a-b) + (5\sqrt{2} - 7)b \right] \leq 0$$

+ Nếu  $b < c$  thì  $f(a)$  là một hàm giảm ba chiều bậc ba có hệ số cao nhất và thấp nhất đồng. Ta có

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} f(a) = -\infty$$

$$f(0) > 0$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} f(a) = +\infty$$

Ta lại có

$$f(c) = -bc^2 \left( 5\sqrt{b^2 + c^2} - 4b - 3c \right) < 0$$

$$\text{Vì } 25(b^2 + c^2) - (3c + 4b)^2 = (3b - 4c)^2 > 0$$

Ngoài ra,

$$f\left(\sqrt{b^2 + c^2}\right) = 2bc \left( 4b\sqrt{b^2 + c^2} - 5b^2 - c^2 \right) \\ = -2bc \left( \sqrt{b^2 + c^2} - 2b \right)^2 \\ \leq 0$$

Do đó  $f$  có ba nghiệm phân biệt (1 nghiệm âm, 1 nghiệm thuộc  $(0, c)$  và 1 nghiệm không nhỏ hơn  $\sqrt{b^2 + c^2}$ ). Do  $c \leq a \leq \sqrt{b^2 + c^2}$  nên  $f(a) \leq 0$ .

$\Rightarrow$  đpcm.

Giá trị nhỏ nhất xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ \sqrt{b^2 + c^2} = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$

Vậy

$$k_{\min} = \frac{5}{4}.$$

### Bài toán 25.

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b+c}{a^3+bc} + \frac{c+a}{b^3+ca} + \frac{a+b}{c^3+ab} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

*Lời giải.*

Trước hết, ta chứng minh các Bất đẳng thức sau

**Bất đẳng thức 1.**  $x, y, z > 0$ . Khi đó ta có

$$(xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2 \geq 4(xy + yz + zx)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)$$

*Chứng minh.*

Ta có

$$\begin{aligned} & (xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2 - 4(xy + yz + zx)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) = \\ & = \sum_{cyc} x^2y^2(x-y)^2 + 2xyz(x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z+x)) \end{aligned}$$

$$\text{Do } \begin{cases} \sum_{cyc} x^2y^2(x-y)^2 \geq 0 \\ x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z+x) \geq 0 \text{ (theo bất đẳng thức Schur)} \end{cases}$$

Nên

$$\begin{aligned} & (xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2 - 4(xy + yz + zx)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \geq 0 \\ & \Rightarrow (xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2 \geq 4(xy + yz + zx)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức 1 được chứng minh hoàn toàn.

**Boańeà2.**  $x, y, z > 0$ . Khi ñoà ta coi

$$\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz} + \frac{y^2(z+x)}{y^2+2zx} + \frac{z^2(x+y)}{z^2+2xy} \leq \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

**Chöng minh.**

Ta coi

$$\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz} = y+z - \frac{2yz(y+z)}{x^2+2yz}$$

$$\frac{y^2(z+x)}{y^2+2zx} = z+x - \frac{2zx(z+x)}{y^2+2zx}$$

$$\frac{z^2(x+y)}{z^2+2xy} = x+y - \frac{2xy(x+y)}{z^2+2xy}$$

Do ñoà

$$\sum_{cyc} \frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz} = 2 \left( (x+y+z) - \sum_{cyc} \frac{yz(y+z)}{x^2+2yz} \right)$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz} \leq \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z) - \sum_{cyc} \frac{yz(y+z)}{x^2+2yz} \leq \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{yz(y+z)}{x^2+2yz} \geq x+y+z - \frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{yz(y+z)}{x^2+2yz} \geq \frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

**Àp dụng bất ñáng thöic Bunhiacopxki, ta coi**

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{yz(y+z)}{x^2+2yz} &= \sum_{cyc} \frac{(xy(x+y))^2}{(z^2+2xy)xy(x+y)} \\ &\geq \frac{(xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2}{\sum_{cyc} (z^2+2xy)xy(x+y)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x))^2}{2(x+y+z)(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)} \\
&\geq \frac{2(xy + yz + zx)}{x+y+z} \quad (\text{theo Bo\~{a}n\~{e}1})
\end{aligned}$$

Bo\~{a}n\~{e}2 n\~{o}i\~{c} ch\~{o}ng minh ho\~{a}n to\~{a}n.

**Bo\~{a}n\~{e}3.**  $a, b, c > 0$ . Khi n\~{o}i\~{c} ta coi

$$\frac{b+c}{a^3+bc} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} + \frac{c+a}{b^3+ca} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} + \frac{a+b}{c^3+ab} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Ch\~{o}ng minh.

N\~{a}t  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c} \Rightarrow x, y, z > 0$ . Khi n\~{o}i\~{c} ta coi

$$\begin{aligned}
\frac{b+c}{a^3+bc} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} &= \frac{x^3(y+z)(x+y+z)}{2x^3 + (x^3 + yz^2 + y^2z + xyz)} \\
&\leq \frac{x^3(y+z)(x+y+z)}{2x^3 + 4xyz} \quad (\text{theo b\~{i}t AM-GM}) \\
&= \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{x^2(y+z)}{x^2 + 2yz}
\end{aligned}$$

T\~{o}ng t\~{o}i, ta coi

$$\begin{aligned}
\frac{c+a}{b^3+ca} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} &\leq \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{y^2(z+x)}{y^2 + 2zx} \\
\frac{a+b}{c^3+ab} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} &\leq \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{z^2(x+y)}{z^2 + 2xy}
\end{aligned}$$

Do n\~{o}i

$$\sum_{cyc} \frac{b+c}{a^3+bc} \cdot \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \leq \frac{x+y+z}{2} \cdot \sum_{cyc} \frac{x^2(y+z)}{x^2 + 2yz}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{x+y+z}{2} \cdot \frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \quad (\text{theo Bo\~{a}n\~{e}2}) \\ &= x^2+y^2+z^2 \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \end{aligned}$$

Bo\~{a}n\~{e}3 n\~{o}i\~{c} ch\~{o}ng minh ho\~{a}n to\~{a}n.

Tr\~{o}i lai bai to\~{a}n của ta

Áp dụng bất đẳng thức AM-HM, ta có

$$\sqrt[3]{abc} \geq \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \Rightarrow 1 \geq \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \quad (\text{do } abc = 1)$$

Do n\~{o}i

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a^3+bc} \leq \sum_{\text{cyc}} \frac{b+c}{a^3+bc} \cdot \frac{1/a+1/b+1/c}{3} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \quad (\text{theo Bo\~{a}n\~{e}3})$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=b=c=1$ .

### Bài toán 26. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}}}$$

*Lời giải.*

Đặt  $x = \sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}$ ,  $y = \sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}$ ,  $z = \sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}$ . Khi n\~{o}i bất đẳng thức cần chứng

minh tổng n\~{o}ng với

$$x+y+z \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4xyz}}$$

Ta sẽ chứng minh

$$x^2+y^2+z^2 \geq 2 \quad (1)$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \geq 1 \quad (2)$$

Khi ñoài ta coi

$$\begin{aligned}
 (x + y + z)^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \\
 &\geq 2 + 2(xy + yz + zx) \\
 &= 2 + 2\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)} \\
 &\geq 2 + 2 \\
 &= 4 \\
 \Rightarrow x + y + z &\geq 2
 \end{aligned}$$

Vaado ñoài

$$\begin{aligned}
 (x + y + z)^2 &\geq 2 + 2\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z)} \\
 &\geq 2 + 2\sqrt{x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 4xyz} \\
 &\geq 2 + 2\sqrt{1 + 4xyz} \\
 \Rightarrow x + y + z &\geq \sqrt{2 + 2\sqrt{1 + 4xyz}}
 \end{aligned}$$

Ñây chính la ñieàu chùng ta cần phải chöng minh.

Vây nhiệm vui của chúng ta bây giờ chæ la chöng minh tính ñúng ñaøn của các bất ñaøn thöïc (1) vaø (2) nòa thôi.

\* Chöng minh (1).

$$(1) \Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$$

Ta coi

$$\begin{aligned}
 \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} - 2 &= \frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} \geq 0 \\
 \Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{a^2+bc} &\geq 2
 \end{aligned}$$

Vây (1) ñúng.

\* Chöng minh (2).

$$(2) \Leftrightarrow \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} + \frac{bc(b+a)(c+a)}{(b^2+ca)(c^2+ab)} + \frac{ca(c+b)(a+b)}{(c^2+ab)(a^2+bc)} \geq 1$$

Ta coi

$$\sum_{cyc} \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} - 1 = \frac{2abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)} \geq 1$$

Vậy (2) đúng.

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

### Bài toán 27. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a+b+c=1$  và  $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+5b}{b+c} + \frac{b^2+5c}{c+a} + \frac{c^2+5a}{a+b} \geq 8$$

*Lời giải.*

Ta coi Boolean sau

Boolean  $x, y, z$  là các số thực thỏa  $\begin{cases} x+y+z \geq 0 \\ xy+yz+zx \geq 0 \end{cases}$ . Khi đó ta coi

$$x(b-c)^2 + y(c-a)^2 + z(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Boolean trên chứng minh rất đơn giản (chỉ cần dùng tam thức bậc hai là được) nên

đôi khi ta không cần lại chứng minh của nó

Trở lại bài toán của ta

Ta coi bất đẳng thức cần chứng minh tổng quát với

$$\left( \sum_{cyc} \frac{2a^2}{b+c} - 1 \right) + 5 \left( \sum_{cyc} \frac{2a}{a+b} - 3 \right) \geq 0$$

Chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2}{b+c} = a+b+c + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)} = 1 + \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \quad (\text{theo gt})$$



$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2}{b+c} - 1 = \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \\ &\sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{a+b} = 3 - \frac{\sum_{\text{cyc}} (a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \\ &\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{a+b} - 3 = -\frac{\sum_{\text{cyc}} (a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \end{aligned}$$

Do ñoài baø ñaøg thoøi caø chøøng minh töøng ñoøng vòøi

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} - \frac{5 \sum_{\text{cyc}} (a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2(4b-a) \geq 0 \end{aligned}$$

Ñoài  $S_a = 4c - b, S_b = 4a - c, S_c = 4b - a$ . Khi ñoài baø ñaøg thoøi caø chøøng minh töøng ñoøng vòøi

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Còøi 2 trøøng hòøp xaøy ra

\* Trøøng hòøp 1.  $a \geq b \geq c \geq 0 \Rightarrow S_b \geq 0$ . Khi ñoài ta còøi

$$S_a + S_b = 4a - b + 3c \geq 0$$

$$S_b + S_c = 3a + 4b - c \geq 0$$

Chuyøi raøng  $(a-c)^2 \geq (a-b)^2 + (b-c)^2$ . Do ñoài

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0$$

\* Trøøng hòøp 2.  $0 \leq a \leq b \leq c \Rightarrow S_a, S_c \geq 0$ . Neøu  $S_b \geq 0$  thì ta còøng ngay ñøpcm, do

ñoài chaø caø xeøi  $S_b \leq 0$  laø ñoài

+ Trøøng hòøp 2.1.  $2b \geq c$ . Khi ñoài ta còøi

$$S_a + 2S_b = 8a - b + 2c \geq 0$$

$$S_c + 2S_b = 6a + 4b - 2c \geq 0$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$(c-a)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

+ Trường hợp 2.2.  $c \geq 2b$

- Trường hợp 2.2.1.  $a + (\sqrt{3}-1)c \geq \sqrt{3}b \Leftrightarrow 3(b-c)^2 \geq (c-a)^2$ .

Khi đó ta có

$$S_a + 3S_b = 12a - b + c \geq 0$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 3S_b)(b-c)^2 \geq 0$$

- Trường hợp 2.2.2.  $a + (\sqrt{3}-1)c \leq \sqrt{3}b \Rightarrow b \geq \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \cdot c \geq \frac{2c}{5}$

Khi đó ta có

$$S_a + S_b + S_c = 3(a+b+c) \geq 0$$

$$\begin{aligned} S_a S_b + S_b S_c + S_c S_a &= (4c-b)(4a-c) + (4a-c)(4b-a) + (4b-a)(4c-b) \\ &= 13(ab+bc+ca) - 4(a^2+b^2+c^2) \\ &\geq 13bc - 4(b^2+c^2) \\ &\geq 13 \cdot \frac{2c}{5} \cdot c - 4 \left( c^2 + \left( \frac{c}{2} \right)^2 \right) \\ &= \frac{c^2}{5} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức vôi  $x = S_a, y = S_b, z = S_c$ , ta suy ra

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

### Bài toán 28. (Phạm Kim Hưng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+ab} \geq 2$$

*Lời giải.*

Ta có 2 cách giải

\* **Cách 1.** (tham khảo lời giải bài toán 26)

\* **Cách 2.**

Không mất tính tổng quát coi thế giới  $a \geq b \geq c$ .

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(b-c)(a-c)}{c^2+ab} \leq \frac{b(c+a)}{b^2+ca}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc} + \frac{(b-c)(a-c)}{c^2+ab} &= (a-c) \left( \frac{a-b}{a^2+bc} + \frac{b-c}{c^2+ab} \right) \\ &\leq (a-c) \left( \frac{a-b}{a^2} + \frac{b-c}{ab} \right) \\ &= \frac{(a-c)(2ab - b^2 - ac)}{a^2b} \\ &\leq \frac{2ab - b^2 - ac}{ab} \end{aligned}$$

Do nội hệ chứng minh bất đẳng thức này cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{2ab - b^2 - ac}{ab} &\leq \frac{b(c+a)}{b^2+ca} \\ \Leftrightarrow (2ab - b^2 - ac)(b^2 + ca) &\leq ab^2(c+a) \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 b^2 + a^2 c^2 &\geq 2(a-b)bac \text{ (nhúng theo bđt AM-GM)} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Giá trị tối đa xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

### Bài toán 29. (Phạm Kim Hưng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c = 2$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a^2 - ab + b^2)(b^2 - bc + c^2)(c^2 - ca + a^2)$$

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Khi đó ta có

$$0 \leq a^2 - ac + c^2 \leq a^2$$

$$0 \leq b^2 - bc + c^2 \leq b^2$$

Do đó

$$P \leq a^2 b^2 (a^2 - ab + b^2) = v^2 (u^2 - 3v) \quad (\text{trong đó } u = a + b, v = ab)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$P \leq v^2 (u^2 - 3v) \leq \frac{4}{9} \cdot \left( \frac{\frac{3v}{2} + \frac{3v}{2} + u^2 - 3v}{3} \right)^3 = \frac{4u^6}{243} = \frac{4(a+b)^6}{243} \leq \frac{4(a+b+c)^6}{243} = \frac{2^8}{243}$$

Giá trị tối đa xảy ra khi và chỉ khi  $a = \frac{4}{3}, b = \frac{2}{3}, c = 0$  và các hoán vị.

Vậy

$$\max P = \frac{2^8}{243}$$

### Bài toán 30. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $xy + yz + zx + xyz = 4$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{5x+1} + \frac{1}{5y+1} + \frac{1}{5z+1} \geq \frac{1}{2}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(2+x)(2+y) + (2+y)(2+z) + (2+z)(2+x)}{(2+x)(2+y)(2+z)} \\
&= \frac{12 + 4(x+y+z) + (xy + yz + zx)}{8 + 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) + xyz} \\
&= \frac{8 + 4(x+y+z) + (xy + yz + zx) + 4}{8 + 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) + xyz} \\
&= \frac{8 + 4(x+y+z) + (xy + yz + zx) + (xy + yz + zx + xyz)}{8 + 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) + xyz} \quad (\text{theo gt}) \\
&= \frac{8 + 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) + xyz}{8 + 4(x+y+z) + 2(xy + yz + zx) + xyz} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Vậy  $\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} = 1$

Nhàt  $a = \frac{1}{2+x}, b = \frac{1}{2+y}, c = \frac{1}{2+z}$  thì ta coi  $\begin{cases} 0 < a, b, c < \frac{1}{2} \\ a + b + c = 1 \\ x = \frac{1-2a}{a}, y = \frac{1-2b}{b}, z = \frac{1-2c}{c} \end{cases}$

Do ñoi

$$\frac{1}{5x+1} = \frac{1}{\frac{5(1-2a)}{a} + 1} = \frac{a}{5-9a}$$

Tông tòi, ta coi

$$\frac{1}{5y+1} = \frac{b}{5-9b}$$

$$\frac{1}{5z+1} = \frac{c}{5-9c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5x+1} + \frac{1}{5y+1} + \frac{1}{5z+1} = \frac{a}{5-9a} + \frac{b}{5-9b} + \frac{c}{5-9c}$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left( \frac{9a}{5-9a} + \frac{9b}{5-9b} + \frac{9c}{5-9c} \right)$$

$$= \frac{1}{9} \cdot \left( \frac{(9a-5)+5}{5-9a} + \frac{(9b-5)+5}{5-9b} + \frac{(9c-5)+5}{5-9c} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \left( \frac{1}{5-9a} + \frac{1}{5-9b} + \frac{1}{5-9c} \right) \\
&\geq -\frac{1}{3} + \frac{5}{9} \cdot \frac{9}{(5-9a) + (5-9b) + (5-9c)} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{5}{15-9(a+b+c)} \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{5}{15-9} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Vậy

$$\frac{1}{5x+1} + \frac{1}{5y+1} + \frac{1}{5z+1} \geq \frac{1}{2} \quad (\text{đpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 1$ .

\* Nhận xét.

Có thể thấy là một bài toán không có nhiều nhà bác học của nước nhà đã nghiên cứu và tìm ra được đẳng thức  $xy + yz + zx + xyz = 4$  ta có thể suy ra một số bất đẳng thức

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} = 1$$

Và chính những bất đẳng thức này mà bài toán của ta đã trở nên cực kỳ khó giải. Bằng cách sử dụng bất đẳng thức này, ta có thể dễ dàng chứng minh một số kết quả sau

$$(1) \quad x + y + z \geq xy + yz + zx$$

$$(2) \quad \frac{1}{2+x^m} + \frac{1}{2+y^m} + \frac{1}{2+z^m} \leq \frac{1}{2+x^n} + \frac{1}{2+y^n} + \frac{1}{2+z^n} \quad \forall m > 1 > n > 0$$

### Bài toán 31. (Voi Quốc Bài Cẩn)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2} \geq \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)^2}$$

*Lời giải.*

Do cả hai vế của bất đẳng thức đều cho tổng bậc nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a+b+c=3$ .

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở nên

$$\begin{aligned} & \frac{(3-2a)^2}{2a^2+(3-a)^2} + \frac{(3-2b)^2}{2b^2+(3-b)^2} + \frac{(3-2c)^2}{2c^2+(3-c)^2} \geq \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) \\ \Leftrightarrow & \frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2 \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{2(3-2x)^2}{x^2-2x+3} \geq x^2-6x+6 \quad \forall x \in (0, 3) \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow 2(3-2x)^2 \geq (x^2-6x+6)(x^2-2x+3) \\ & \Leftrightarrow x(x-1)^2(6-x) \geq 0 \quad (\text{nhưng do } 0 < x < 3) \end{aligned}$$

Vậy (\*) đúng.

Do đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} \geq a^2-6a+6 \\ & \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} \geq b^2-6b+6 \\ & \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq c^2-6c+6 \\ \Rightarrow & \frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+18 \\ & = a^2+b^2+c^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3} + \frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3} + \frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3} \geq a^2 + b^2 + c^2 \text{ (ñpcm)}$$

Ñáng thòic xay ra khi vaøchæ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 32. (VoiQuốc BàiCain)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chöing minh rằng

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{1}{3} \left( \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{2(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 4$$

#### Löi giải.

Do hai veácuá bài ñáng thòic ñã cho ñöing bài nên không maát tính tổng quát, ta coi theágiaisöi  $a^2 + b^2 + c^2 = 3$ . Ñãt  $p = ab + bc + ca$  thì ta coi  $0 < p \leq 3$ .

Khi ñöi ta coi

$$\begin{aligned} & \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{1}{3} \left( \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{2(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) = \\ & = \frac{3}{p} + \frac{1}{3} \left( \frac{a+b+c}{abc} \cdot (3-p) + 3 + \frac{2(3+2p)}{3} \right) \\ & = \frac{3}{p} + \frac{1}{3} \left( \left( \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \cdot (3-p) + \frac{4p}{3} + 5 \right) \\ & \geq \frac{3}{p} + \frac{1}{3} \left( \frac{9}{p} \cdot (3-p) + \frac{4p}{3} + 5 \right) \\ & = \frac{12}{p} + \frac{4p}{9} - \frac{4}{3} \\ & = \frac{8}{p} + 4 \left( \frac{1}{p} + \frac{p}{9} \right) - \frac{4}{3} \\ & \geq \frac{8}{3} + 4 \cdot 2 \sqrt{\frac{1}{p} \cdot \frac{p}{9}} - \frac{4}{3} \text{ (theo bñt AM-GM)} \\ & = 4 \\ & \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{ab + bc + ca} + \frac{1}{3} \left( \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} + \frac{2(a+b+c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \right) \geq 4 \text{ (ñpcm)} \end{aligned}$$

Ñáng thòic xay ra khi vaøchæ khi  $a = b = c$ .



### Bài toán 33. (Voi Quốc Bài Cẩn)

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}} + \frac{1}{b\sqrt{3b+2c}} + \frac{1}{c\sqrt{3c+2a}} \geq \frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

*Lời giải.*

Đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}, z = \frac{1}{c}$  thì ta có  $x, y, z > 0$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh

tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{3zx+2yz}} + \frac{y}{\sqrt{3xy+2zx}} + \frac{z}{\sqrt{3yz+2xy}} &\geq \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{5z} \cdot \sqrt{3x+2y}} + \frac{y}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{3y+2z}} + \frac{z}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{3z+2x}} &\geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} &\frac{x}{\sqrt{5z} \cdot \sqrt{3x+2y}} + \frac{y}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{3y+2z}} + \frac{z}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{3z+2x}} \geq \\ &\geq 2 \left( \frac{x}{3x+2y+5z} + \frac{y}{5x+3y+2z} + \frac{z}{2x+5y+3z} \right) \\ &\geq \frac{2(x+y+z)^2}{x(3x+2y+5z) + y(5x+3y+2z) + z(2x+5y+3z)} \\ &= \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + 7(xy+yz+zx)} \\ &= \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{3} \cdot (xy+yz+zx) + \frac{20}{3} \cdot (xy+yz+zx)} \\ &\geq \frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2) + \frac{1}{3} \cdot (x^2+y^2+z^2) + \frac{20}{3} \cdot (xy+yz+zx)} \\ &= \frac{3(x+y+z)^2}{5(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)} = \frac{3}{5} \\ &\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{5z} \cdot \sqrt{3x+2y}} + \frac{y}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{3y+2z}} + \frac{z}{\sqrt{5y} \cdot \sqrt{3z+2x}} \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

Ñáng thời xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ .

### Bài toán 34. (R. Stanojevic )

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} \geq \sqrt{2}$$

*Lời giải.*

Do  $abc = 1$  nên tồn tại các số  $x, y, z > 0$  sao cho  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{z}{x}, c = \frac{y}{z}$ , chẳng hạn

$x = \sqrt[3]{ca^2}, y = \sqrt[3]{bc^2}, z = \sqrt[3]{ab^2}$ . Khi ñó ta có

$$\frac{1}{\sqrt{a + \frac{1}{c} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y} + \frac{z}{y} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2y}{2x + y + 2z}}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{c + \frac{1}{b} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2z}{2x + 2y + z}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2x}{x + 2y + 2z}}$$

Khi ñó bất ñáng thời cần chứng minh trở thành

$$\sqrt{\frac{x}{x + 2y + 2z}} + \sqrt{\frac{y}{y + 2z + 2x}} + \sqrt{\frac{z}{z + 2x + 2y}} \geq 1$$

Áp dụng bất ñáng thời AM-GM, ta có

$$\sqrt{\frac{x}{x + 2y + 2z}} = \frac{2x}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{x + 2y + 2z}} \geq \frac{2x}{x + (x + 2y + 2z)} = \frac{x}{x + y + z}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{y}{y+2z+2x}} &\geq \frac{y}{x+y+z} \\ \sqrt{\frac{z}{z+2x+2y}} &\geq \frac{z}{x+y+z} \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x+2y+2z}} + \sqrt{\frac{y}{y+2z+2x}} + \sqrt{\frac{z}{z+2x+2y}} &\geq \\ &\geq \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1 \\ \Rightarrow \text{hpcm.} \end{aligned}$$

### Bài toán 35. (Taiwanese Mathematical Olympiad 1992)

Cho  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$  thỏa  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Chứng minh rằng

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \dots + x_n^2 x_1 \leq \frac{4}{27}$$

*Lời giải.*

Đặt  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \dots + x_n^2 x_1$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $x_1 = \max x_i \ (i = \overline{1, n})$ .

Đặt  $x_k = \max x_i \ (i = \overline{2, n})$ .

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(1-x_k, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ số } 0}) &= f(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ số } 0}) \\ &= (x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n)^2 x_k \\ &\geq (x_1^2 + 2x_1(x_2 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n))x_k \\ &\geq x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + \dots + x_n^2 x_1 \quad (\text{do } x_1 \geq x_k = \max x_i \ (i = \overline{2, n})) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Ta lại có

$$f(1-x_k, x_k, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ số } 0}) = (1-x_k)^2 x_k = \frac{1}{2} \cdot (2x_k) \cdot (1-x_k)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{2x_k + 2(1-x_k)}{3} \right)^3 = \frac{4}{27}$$

Vậy  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{4}{27}$  (đpcm).

### Bài toán 36.

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c + abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \leq \frac{(2 + abc)(1 + 2abc)}{7 - abc}$$

*Lời giải.*

Đặt  $m = \frac{a+b+c}{3} \Rightarrow 3m + abc = 1$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(2 + abc)(1 + 2abc)}{7 - abc} = \frac{(3 - 3m)(3 - 6m)}{6 + 3m} = \frac{3(1 - m)(1 - 2m)}{2 + m} \\ \Rightarrow A - 3m^2 &= \frac{3(1 - m)(1 - 2m)}{2 + m} - 3m^2 = \frac{3(1 - 3m - m^3)}{2 + m} = \frac{3(abc - m^3)}{2 + m} \\ \Rightarrow A &= \frac{3(abc - m^3)}{2 + m} + 3m^2 \end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{3(abc - m^3)}{2 + m} + 3m^2 &\geq ab + bc + ca \\ \Leftrightarrow 3m^2 - ab - bc - ca &\geq \frac{3(m^3 - abc)}{2 + m} \\ \Leftrightarrow 3(a + b + c)^2 - 9(ab + bc + ca) &\geq \frac{(a + b + c)^3 - 27abc}{2 + m} \\ \Leftrightarrow 3(2 + m)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)) &\geq (a + b + c)^3 - 27abc \end{aligned}$$

Do  $3m + abc = 1$  nên  $m \leq \frac{1}{3} \Rightarrow 2 + m \geq 7m = \frac{7(a + b + c)}{3} \geq \frac{4(a + b + c)}{3}$ .

Do đó ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} 4(a + b + c)((a + b + c)^2 - 3(ab + bc + ca)) &\geq (a + b + c)^3 - 27abc \\ \Leftrightarrow 4 \left( \sum_{cyc} a^3 - 3abc \right) &\geq \sum_{cyc} a^3 + 3 \sum_{cyc} ab(a + b) - 21abc \\ \Leftrightarrow 3 \sum_{cyc} a^3 + 9abc &\geq 3 \sum_{cyc} ab(a + b) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} ab(a+b) \quad (\text{nh\u00e2ng theo Schur})$$

$\Rightarrow$  \u0111pcm.

### B\u00e0i to\u00e1n 37. (V\u00f2i Qu\u00f3c B\u00e0i C\u00e1n)

Cho  $a, b, c > 0$  tho\u00e1  $abc = 2\sqrt{ab+bc+ca+4}$ . Ch\u00f9ng minh r\u00e1ng

$$\frac{a^7}{1+ab^2} + \frac{b^7}{1+bc^2} + \frac{c^7}{1+ca^2} \geq \frac{128}{3}$$

*L\u00f4i gi\u00e1i.*

\u0110\u00fang b\u00e1t nh\u00e2ng th\u00f2c Bunhiacopxki, ta c\u00f2i

$$\begin{aligned} \frac{a^7}{1+ab^2} + \frac{b^7}{1+bc^2} + \frac{c^7}{1+ca^2} &= \frac{a^7c}{c+ab^2c} + \frac{b^7a}{a+abc^2} + \frac{c^7b}{b+ca^2b} \\ &\geq \frac{(a^{7/2} \cdot c^{1/2} + b^{7/2} \cdot a^{1/2} + c^{7/2} \cdot b^{1/2})^2}{a+b+c+a^2bc+ab^2c+abc^2} \\ &= \frac{(a^{7/2} \cdot c^{1/2} + b^{7/2} \cdot a^{1/2} + c^{7/2} \cdot b^{1/2})^2}{(a+b+c)(1+abc)} \end{aligned}$$

\u0110\u00fang b\u00e1t nh\u00e2ng th\u00f2c AM–GM, ta c\u00f2i

$$\begin{aligned} 23a^{7/2} \cdot c^{1/2} + 11b^{7/2} \cdot a^{1/2} + 9c^{7/2} \cdot b^{1/2} &\geq 43a^2bc \\ 23b^{7/2} \cdot a^{1/2} + 11c^{7/2} \cdot b^{1/2} + 9a^{7/2} \cdot c^{1/2} &\geq 43ab^2c \\ 23c^{7/2} \cdot b^{1/2} + 11a^{7/2} \cdot c^{1/2} + 9b^{7/2} \cdot a^{1/2} &\geq 43abc^2 \\ \Rightarrow 43(a^{7/2} \cdot c^{1/2} + b^{7/2} \cdot a^{1/2} + c^{7/2} \cdot b^{1/2}) &\geq 43abc(a+b+c) \\ \Leftrightarrow a^{7/2} \cdot c^{1/2} + b^{7/2} \cdot a^{1/2} + c^{7/2} \cdot b^{1/2} &\geq abc(a+b+c) \end{aligned}$$

Do \u0111\u00f2i

$$\begin{aligned} \frac{a^7}{1+ab^2} + \frac{b^7}{1+bc^2} + \frac{c^7}{1+ca^2} &\geq \frac{(a^{7/2} \cdot c^{1/2} + b^{7/2} \cdot a^{1/2} + c^{7/2} \cdot b^{1/2})^2}{(a+b+c)(1+abc)} \\ &\geq \frac{(abc(a+b+c))^2}{(a+b+c)(1+abc)} \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc} \end{aligned}$$

Ta c\u00f2i

$$abc = 2\sqrt{ab+bc+ca+4} \geq \sqrt{4\sqrt[4]{ab \cdot bc \cdot ca} \cdot 4} = 4\sqrt[4]{2abc}$$

$$\Rightarrow abc \geq 8$$

Do ñoài

$$\begin{aligned} \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc} &\geq \frac{a^2b^2c^2 \cdot 3\sqrt[3]{abc}}{1+abc} \\ &\geq \frac{6a^2b^2c^2}{1+abc} \\ &\geq \frac{6 \cdot 8^2}{1+8} \quad (\text{do } f(t) = \frac{t^2}{1+t} \text{ ñoàng bieán treán } (0, +\infty)) \\ &= \frac{128}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^7}{1+ab^2} + \frac{b^7}{1+bc^2} + \frac{c^7}{1+ca^2} = \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc} \geq \frac{128}{3} \quad (\text{ñpcm})$$

Ñoàng thuoác xaáy ra khi vaø chaø khi  $a = b = c = 2$ .

### Baøi toaøn 38. (Phaím Kim Hung)

Cho  $a, b, c > 0$  thoà  $abc = 1$ . Chöng minh raàng

$$\text{a) } \frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$$

$$\text{b) } \frac{a+3}{(1+a)^2} + \frac{b+3}{(1+b)^2} + \frac{c+3}{(1+c)^2} \geq 3$$

*Löi giaøi.*

$$\text{a) } \text{Ñaét } x = \frac{2}{1+a} - 1, y = \frac{2}{1+b} - 1, z = \frac{2}{1+c} - 1 \Rightarrow x, y, z \in [-1, 1]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) &= \left(2 - \frac{2}{1+a}\right) \left(2 - \frac{2}{1+b}\right) \left(2 - \frac{2}{1+c}\right) \\ &= \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= \frac{8}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ &= (1+x)(1+y)(1+z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x + y + z + xyz = 0$$

Do nội bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 + (x+1)(y+1)(z+1) \geq 4 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 3(x+y+z) + xyz \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx - 2xyz \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) - 4xyz \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 + (x+y+z)^2 - 4xyz \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz \geq 0 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 & \geq 4\sqrt[4]{x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 \cdot x^2y^2z^2} = 4|xyz| \geq 4xyz \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + x^2y^2z^2 - 4xyz & \geq 0 \text{ (ñpcm)} \end{aligned}$$

b) **Nhàt**  $x = \frac{2}{1+a} - 1, y = \frac{2}{1+b} - 1, z = \frac{2}{1+c} - 1 \Rightarrow x, y, z \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) & = \left(2 - \frac{2}{1+a}\right) \left(2 - \frac{2}{1+b}\right) \left(2 - \frac{2}{1+c}\right) \\ & = \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ & = \frac{8}{(1+a)(1+b)(1+c)} \\ & = (1+x)(1+y)(1+z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x + y + z + xyz = 0$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & (x+1)(x+2) + (y+1)(y+2) + (z+1)(z+2) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 \geq -3(x+y+z) \\ \Leftrightarrow & x^2 + y^2 + z^2 \geq 3xyz \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM–GM, ta có

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 & \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \geq 3xyz \text{ (do } x, y, z \in [-1, 1]) \\ \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 & \geq 3xyz \text{ (ñpcm)} \end{aligned}$$

**Bài toán 39. (Voi Quốc Bài Cẩn)**

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq 2$$

*Lời giải.*

Ta sẽ chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 2 \tag{1}$$

$$\sum_{cyc} \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq 1 \tag{2}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} \left( \sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \right)^2 &= \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} + 2 \sum_{cyc} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &\geq 2 + 2 \sum_{cyc} \sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}} \\ &\geq 2 + 2 \sum_{cyc} \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq 4 \\ \Rightarrow \sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} &\geq 2 \end{aligned}$$

Như vậy chính là điều ta cần phải chứng minh, vậy nhiệm vụ của ta bây giờ chỉ là chứng minh tính đúng đắn của các bất đẳng thức (1) và (2) nữa thôi.

\* Chứng minh (1).

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} - 2 = \frac{\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2+2c^2) + 8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 2$$

$\Rightarrow$  (1) đúng.



\* Chứng minh (2).

Ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} - 1 = \frac{2abc((a+b+c)(a^2+b^2+c^2) - abc)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

$\Rightarrow$  (2) đúng

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

\* Nhận xét.

Ngoài ra, ta còn có một bất đẳng thức mạnh hơn như sau

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Khi đó

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}}}$$

#### Bài toán 40. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a+b+c=1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{b\sqrt{c}}{a(2\sqrt{c}+\sqrt{3ab})} + \frac{c\sqrt{a}}{b(2\sqrt{a}+\sqrt{3bc})} + \frac{a\sqrt{b}}{c(2\sqrt{b}+\sqrt{3ca})} \geq 1$$

Lời giải.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}}{a\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{ca}{b}}} + \frac{\sqrt{\frac{ca}{b}}}{b\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{ab}{c}}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{c\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{bc}{a}}} \geq 1$$

Đặt  $x = \sqrt{\frac{bc}{a}}, y = \sqrt{\frac{ca}{b}}, z = \sqrt{\frac{ab}{c}}$  thì ta có  $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xy + yz + zx = 1 \text{ (do } a+b+c=1) \end{cases}$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{x}{2y+yz\sqrt{3}} + \frac{y}{2z+zx\sqrt{3}} + \frac{z}{2x+xy\sqrt{3}} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \frac{x}{2y + yz\sqrt{3}} + \frac{y}{2z + zx\sqrt{3}} + \frac{z}{2x + xy\sqrt{3}} &= \frac{x^2}{2xy + xyz\sqrt{3}} + \frac{y^2}{2yz + xyz\sqrt{3}} + \frac{z^2}{2zx + xyz\sqrt{3}} \\ &\geq \frac{(x + y + z)^2}{2(xy + yz + zx) + 3xyz\sqrt{3}} \\ &\geq \frac{3(xy + yz + zx)}{2(xy + yz + zx) + 3xyz\sqrt{3}} \\ &= \frac{3}{2 + 3xyz\sqrt{3}} \\ &\geq \frac{3}{2 + 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{xy + yz + zx}{3}\right)^3}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2y + yz\sqrt{3}} + \frac{y}{2z + zx\sqrt{3}} + \frac{z}{2x + xy\sqrt{3}} \geq 1$$

$\Rightarrow$  đpcm.

#### Bài toán 41. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho  $x, y, z$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến). Tìm hằng số  $k$  lớn nhất sao cho

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 6 \left( \frac{x}{y + z} + \frac{y}{z + x} + \frac{z}{x + y} \right) + \frac{k(x - y)^2 (y - z)^2 (z - x)^2}{xyz(x + y)(y + z)(z + x)}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (x - y)^2 (z^2 + xz + yz - 2xy) z(x + y) &\geq \\ &\geq k(x - y)^2 (y - z)^2 (z - x)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Do  $x, y, z$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến) nên tồn tại các số không âm  $a, b, c$  sao cho  $x = b + c, y = c + a, z = a + b$ .

Thay vào (1), ta có bất đẳng thức (1) trở thành

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (a-b)^2(a^2+b^2-c^2+ab)(a+b)(a+b+2c) &\geq \\ &\geq \frac{k}{2} \cdot (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

Cho  $c \rightarrow 0^+$ , ta ñõõc (2) trõõthanh

$$\begin{aligned} &2(b^3(b^2-a^2)(2a+b)+a^3(a^2-b^2)(a+2b)+ \\ &\quad + (a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)^2) \geq \frac{k}{2} \cdot a^2b^2(a-b)^2 \\ \Leftrightarrow &2((a-b)^2(a+b)^4+(a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)^2) \geq k \cdot a^2b^2(a-b)^2 \\ \Leftrightarrow &2((a+b)^4+(a^2+b^2+ab)(a+b)^2) \geq k \cdot a^2b^2 \end{aligned}$$

Cho  $a=b=1$ , ta suy ra ñõõc:  $k \leq 56$ .

Ta seõchõing minh  $k_{\max} = 56$ , tõõc laõchõing minh

$$\sum_{cyc} (a-b)^2(a^2+b^2-c^2+ab)(a+b)(a+b+2c) \geq 28(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Khõing mat tĩnh tõng quat giaõsõõ  $a \geq b \geq c \geq 0$ .

Ta cõõbat ñõõc trõõn tõõng ñõõng võõi

$$\begin{aligned} &((b-c)^2(b^2-a^2)(b+c)(2a+b+c)+(a-c)^2(a^2-b^2)(a+c)(a+2b+c))+ \\ &\quad + (a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)(a+b+2c)+ \\ &\quad + ((ac+c^2)(a-c)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c))+ \\ &\quad + (bc+c^2)(b-c)^2(b+c)(2a+b+c) \geq \\ &\quad \geq 28(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \end{aligned}$$

Do  $a \geq b \geq c \geq 0$  ñõõn

$$(bc+c^2)(b-c)^2(b+c)(2a+b+c) \geq 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} &(ac+c^2)(a-c)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c) \geq \\ &\geq 2c^2(a-b)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c) \\ &= c^2(a-b)^2(2(a+c)(a+2b+c)-(a+b)(a+b+2c)) \\ &= c^2(a-b)^2(a^2+2ab-b^2+2c(a+2b+c)-2bc) \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (ac + c^2)(a - c)^2(a + c)(a + 2b + c) &\geq \\ &\geq c^2(a - b)^2(a + b)(a + b + 2c) \end{aligned} \quad (4)$$

Lại do  $a \geq b \geq c \geq 0$  nên  $a - c \geq \frac{a}{b} \cdot (b - c) \geq 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (b - c)^2(b^2 - a^2)(b + c)(2a + b + c) &+ (a - c)^2(a^2 - b^2)(a + c)(a + 2b + c) \geq \\ &\geq (b - c)^2(b^2 - a^2)(b + c)(2a + b + c) + \frac{a^2}{b^2} \cdot (b - c)^2(a^2 - b^2)(a + c)(a + 2b + c) \\ &= \frac{(b - c)^2(a^2 - b^2)(a^2(a + c)(a + 2b + c) - b^2(b + c)(2a + b + c))}{b^2} \\ &= \frac{(b - c)^2(a^2 - b^2)((a^4 - b^4) + 2ab(a^2 - b^2) + 2c(a^3 - b^3) + 2abc(a - b) + c^2(a^2 - b^2))}{b^2} \\ &\geq \frac{(b - c)^2(a^2 - b^2)((a^4 - b^4) + 2ab(a^2 - b^2))}{b^2} \\ &= \frac{(b - c)^2(a - b)^2(a + b)^4}{b^2} \\ &\geq \frac{(b - c)^2(a - b)^2 \cdot 16a^2b^2}{b^2} \quad (\text{theo bñt AM-GM}) \\ &= 16(a - b)^2(b - c)^2a^2 \\ &\geq 16(a - b)^2(b - c)^2(a - c)^2 \end{aligned} \quad (5)$$

Ta lại có:

$$\begin{aligned} (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab)(a + b)(a + b + 2c) &\geq \\ &\geq (a - b)^2(a^2 + b^2 + ab)(a + b)^2 \\ &\geq (a - b)^2(2ab + ab)4ab \quad (\text{theo bñt AM-GM}) \\ &= 12(a - b)^2a^2b^2 \\ &\geq 12(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \end{aligned}$$

Tổng (3), (4), (5) và (6), ta suy ra

$$\sum_{cyc} (a - b)^2(a^2 + b^2 - c^2 + ab)(a + b)(a + b + 2c) \geq 28(a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2$$

Vậy  $k_{\max} = 56$ .

**Bài toán 42. (Poland 2005)**

Cho  $a, b, c \in [0, 1]$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

*Lời giải.*

Do  $a, b, c \in [0, 1]$  nên  $bc+1 \geq abc+1 > 0 \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{abc+1}$

Tương tự, ta có

$$\frac{b}{ca+1} \leq \frac{b}{abc+1}$$

$$\frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{abc+1}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ca+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a+b+c}{abc+1}$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức này cho, ta cần chứng minh

$$\frac{a+b+c}{abc+1} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow a+b+c \leq 2(1+abc)$$

Do  $a, b \in [0, 1]$  nên  $(1-a)(1-b) \geq 0 \Rightarrow a+b \leq 1+ab$

$$\Rightarrow a+b+c \leq 1+ab+c$$

Lại do  $a, b, c \in [0, 1]$  nên  $(1-ab)(1-c) \geq 0 \Rightarrow ab+c \leq 1+abc$

$$\Rightarrow a+b+c \leq 1+ab+c \leq 2+abc \leq 2(1+abc)$$

$\Rightarrow$  đpcm.

**Bài toán 43. (China 2006)**

Cho  $x, y, z > 0$  thỏa  $x+y+z=1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}} + \frac{yz}{\sqrt{yz+zx}} + \frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Lời giải.*

Ta cần chứng minh tổng không vượt

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \sqrt{z+x} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{z} + \sqrt{x}) > 0 \\ \Rightarrow \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}} &\leq \sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned} \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}} &\leq \sqrt{2} \cdot \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \\ \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}} &\leq \sqrt{2} \cdot \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \\ \Rightarrow \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}} &\leq \sqrt{2} \cdot \left( \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} \right) \end{aligned}$$

Do nội nội chứng minh bất đẳng thức nào cho, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} + \frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y} + \sqrt{z}} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} - \sqrt{xy} \right) + \sum_{cyc} \sqrt{xy} &\leq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \sqrt{xy} \leq 1 + 2\sqrt{xyz} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \sqrt{xy} \leq \sum_{cyc} x + 2\sqrt{xyz} \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{x}} & \quad (*) \end{aligned}$$

Đặt  $a = \sqrt{x}, b = \sqrt{y}, c = \sqrt{z}$  thì ta có  $a, b, c > 0$ . Khi nội bất đẳng thức (\*) trở thành

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) \geq 2(ab + bc + ca) \quad (**)$$

Do cả hai vế của bất đẳng thức trên không mất tính tổng quát, coi thể giá trị  $a+b+c=1$ . Đặt  $q=ab+bc+ca, r=abc \Rightarrow 0 \leq q \leq \frac{1}{3}$ . Khi này ta có

$$a^2+b^2+c^2=1-2q$$

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = \frac{1+q}{q-r}$$

Do này

$$(**) \Leftrightarrow 1-4q + \frac{2r(1+q)}{q-r} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-4q)(q-r) + 2r(1+q) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow q(1-4q) + r(1+6q) \geq 0$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* **Trường hợp 1.**  $0 \leq q \leq \frac{1}{4}$ . Trong trường hợp này, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

\* **Trường hợp 2.**  $\frac{1}{4} \leq q \leq \frac{1}{3}$ .

Áp dụng bất đẳng thức Schur, ta có  $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ .

Do này

$$q(1-4q) + r(1+6q) \geq q(1-4q) + \frac{(4q-1)(1+6q)}{9} = \frac{(4q-1)(1-3q)}{9} \geq 0$$

Tóm lại, ta luôn có

$$q(1-4q) + r(1+6q) \geq 0$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x=y=z=\frac{1}{3}$ .

**Bài toán 44. (Phạm Kim Hưng)**

Cho  $a, b, c, d \geq 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2$$

*Lời giải.*

Ta sẽ chứng minh rằng  $\min P = \frac{4}{9}$ .

Trong các số  $a, b, c, d$ , gọi  $p$  là số lớn nhất, số lớn nhất trong 3 số còn lại là  $q$ , số lớn nhất trong 2 số còn lại là  $r$  và  $s$  là số nhỏ nhất.

$$\text{Khi đó ta có } \begin{cases} p \geq q \geq r \geq s \\ \frac{1}{p+q+r} \leq \frac{1}{p+q+s} \leq \frac{1}{p+r+s} \leq \frac{1}{q+r+s} \end{cases}$$

Do đó theo bất đẳng thức sắp xếp lại, ta có

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2 + \left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2 + \left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2 + \left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2 \\ &\geq \left(\frac{p}{p+q+r}\right)^2 + \left(\frac{q}{p+q+s}\right)^2 + \left(\frac{r}{p+r+s}\right)^2 + \left(\frac{s}{q+r+s}\right)^2 \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $p+q+r+s=1$ . Khi đó để chứng minh

$P \geq \frac{4}{9}$ , ta cần chứng minh

$$\frac{p^2}{(1-s)^2} + \frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} + \frac{s^2}{(1-p)^2} \geq \frac{4}{9}$$

Đặt  $m = p+s, n = ps, t = \frac{p^2}{(1-s)^2} + \frac{s^2}{(1-p)^2}$  thì ta có  $0 \leq m \leq 1$  và

$$t = \frac{m^2 - 2n - 2m^3 + 6mn + m^4 - 4m^2n + 2n^2}{(1-m+n)^2}$$

$$\Rightarrow n^2(2-t) - 2n(m-1)(2m-1-t) + (m-1)^2(m^2-t) = 0 \quad (*)$$



+ Nếu  $t \geq 2$  thì hiển nhiên ta có

$$\frac{p^2}{(1-s)^2} + \frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} + \frac{s^2}{(1-p)^2} \geq \frac{4}{9}$$

+ Nếu  $\begin{cases} m=1, n=0 \\ t=2 \end{cases}$  thì ta có  $t \geq 1$  vì  $\frac{p^2}{(1-s)^2} = 1$ . Do đó

$$\frac{p^2}{(1-s)^2} + \frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} + \frac{s^2}{(1-p)^2} \geq \frac{4}{9}$$

+ Nếu  $t < 2, m < 1$ . Xem (\*) là phương trình bậc hai với  $n$ . Do  $n$  luôn tồn tại nên ta phải có

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m-1)^2(2m-1-t)^2 - (2-t)(m-1)^2(m^2-t) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2m-1-t)^2 \geq (2-t)(m^2-t) \\ &\Rightarrow t \geq \frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2} \end{aligned}$$

Tổng tối, đặt  $l = q+r \Rightarrow l = 1-m$ . Bằng lập luận tổng tối nhỏ trên, rõ ràng ta cần

xem xét trường hợp  $l < 1$  và  $\frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} < 2$  là như sau. Khi đó ta có

$$\frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} \geq \frac{-2l^2+4l-1}{(2-l)^2} = \frac{1-2m^2}{(1+m)^2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{(1-s)^2} + \frac{q^2}{(1-r)^2} + \frac{r^2}{(1-q)^2} + \frac{s^2}{(1-p)^2} &\geq \frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2} + \frac{1-2m^2}{(1+m)^2} \\ &= \frac{(2m-1)^2(11+10m-10m^2)}{9(2-m)^2(m+1)^2} + \frac{4}{9} \\ &\geq \frac{4}{9} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{4}{9}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d$ .

Vậy  $\min P = \frac{4}{9}$ .

**Bài toán 45. (Phạm Kim Hưng)**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$  và  $k \in \mathbf{R}$  là một hằng số cho trước. Tìm hằng số  $C_k$  nhỏ nhất sao cho

$$C_k(a^k + b^k + c^k) \geq ab + bc + ca$$

*Lời giải.*

Ta coi Boolean sau

**Boolean**  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Khi đó ta có

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{2k}}{2^{2k}} \right\} \quad \forall k \in \mathbf{R}$$

*Chứng minh.*

Ta chứng minh bất đẳng thức nêu cho giá trị tối thiểu

$$3 = \frac{3^{2k}}{2^{2k}} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 3}{2 \ln 3 - 2 \ln 2}$$

Khi đó

+  $\forall m \geq k$ , ta có

$$(ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \leq ((ab)^k + (bc)^k + (ca)^k)^{\frac{m}{k}} \leq \left( \frac{3^{2k}}{2^{2k}} \right)^{\frac{m}{k}} = \frac{3^{2m}}{2^{2m}}$$

$$\Rightarrow (ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{2m}}{2^{2m}} \right\}$$

+  $\forall m < k$ , ta có

$$((ab)^m + (bc)^m + (ca)^m)^{\frac{k}{m}} \leq 3^{\frac{k}{m}-1} ((ab)^k + (bc)^k + (ca)^k) \leq 3^{\frac{k}{m}-1} \cdot 3 = 3^{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow (ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \leq 3$$

$$\Rightarrow (ab)^m + (bc)^m + (ca)^m \leq \max \left\{ 3, \frac{3^{2m}}{2^{2m}} \right\}$$

Không mất tính tổng quát, coi thế giới là số  $a \leq b \leq c$ . Ta chứng minh về trái nhất max khi  $b = c$ .

Thật vậy, nhất  $b + c = 2z, c - b = 2t \Rightarrow z \geq t \geq 0 \wedge a \leq z - t$ . Khi này ta coi

$$VT = a^k \left( (z+t)^k + (z-t)^k \right) + (z^2 - t^2)^k = f(t)$$

Ta coi  $f'(t) = ka^k \left( (z+t)^{k-1} - (z-t)^{k-1} \right) - 2tk(z^2 - t^2)^{k-1}$

Xét hàm số  $g(x) = x^{k-1}$  với  $x \geq 0$ .

Ta coi

$$g'(x) = (k-1)x^{k-2}$$

$$g''(x) = (k-1)(k-2)x^{k-3} \leq 0$$

$\Rightarrow$  theo định lý L'arange, ta có  $g(x) - g(y) \leq (x-y)g'(y) \quad \forall 0 \leq y \leq x$

Áp dụng cho  $y = z-t, x = z+t$ , ta có  $(z+t)^{k-1} - (z-t)^{k-1} \leq 2t(k-1)(z-t)^{k-2}$

Do này

$$\begin{aligned} f'(t) &\leq 2tk(z-t)^{k-2} (a^k(k-1) - (z+t)^{k-1}(z-t)) \\ &\leq 2tk(z-t)^{k-1} (a^{k-1}(k-1) - (z+t)^{k-1}) \quad (\text{do } a \leq z-t) \\ &\leq 2tk(z-t)^{k-1} (a^{k-1} - (z+t)^{k-1}) \leq 0 \quad (\text{do } a \leq z-t \leq z+t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(t)$  là hàm nghịch biến trên  $[0, +\infty)$

$$\Rightarrow f(t) \leq f(0) = 2b^k(3-2b)^k + b^{2k}$$

Bây giờ ta còn phải chứng minh

$$g(b) = 2b^k(3-2b)^k - 2b^k \leq 3 \quad \forall 1 \leq b < \frac{3}{2}$$

Ta coi

$$g'(b) = 2kb^{2k-1} \left[ \left( \frac{3-2b}{b} \right)^k - 2 \left( \frac{3-2b}{b} \right)^{k-1} + 1 \right]$$

Nếu  $x = \frac{3-2b}{b}$  (\*) thì  $0 < x \leq 1$  và ngược lại với mọi  $x \in (0, 1]$  thì ta có duy nhất

$$b \in \left[1, \frac{3}{2}\right) \text{ thỏa mãn (*)}$$

Xét hàm số  $h(x) = x^k - 2x^{k-1} + 1$  với  $x \in (0, 1]$

Ta có

$$h'(x) = x^{k-2}(kx - 2(k-1))$$

$\Rightarrow h'(x)$  có tối đa 1 nghiệm

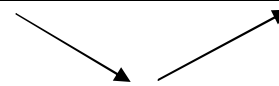
$\Rightarrow h(x)$  có tối đa 2 nghiệm (theo định lý Rolle)

Ta lại có  $h(1) = 0, h\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{8^k - 15}{8^k} > 0, h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2^k - 3}{2^k} < 0$

$\Rightarrow h(x)$  có đúng 2 nghiệm tại  $x_0 \in \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right), x = 1$

$\Rightarrow g'(b)$  có đúng 2 nghiệm tại  $b_0 = \frac{3}{x_0 + 2}, b = 1$

Bảng biến thiên của  $g(b)$

|         |                                                                                     |                     |               |
|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|---------------|
| $b$     | 1                                                                                   | $\frac{3}{x_0 + 2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| $g'(b)$ | 0                                                                                   | -                   | +             |
| $g(b)$  |  |                     |               |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy

$$g(b) \leq \max \left\{ g(1), g\left(\frac{3}{2}\right) \right\} = 3 \quad \forall b \in \left[1, \frac{3}{2}\right)$$

Do đó ta có chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta

\* Nếu  $k \geq 1 \vee k \leq 0$  thì ta có  $a^k + b^k + c^k \geq 3 \geq ab + bc + ca$  và dấu bằng đạt tại  $a = b = c = 1$  nên hiển nhiên  $C_k = 1$ .

\* Xét  $k \in (0, 1)$

Cho  $a = b = c = 1$  ta suy ra  $C_k \geq 1$ .

Cho  $a = b \rightarrow \frac{3}{2}, c \rightarrow 0$ , ta có  $C_k \geq \frac{3^{2-k}}{2^{3-k}}$ .

Ngược lại, ta sẽ chứng minh  $C_k = \max \left\{ 1, \frac{3^{2-k}}{2^{3-k}} \right\}$  thỏa mãn nhiều điều kiện của đề bài,

nghĩa là ta phải chứng minh

$$C_k (a^k + b^k + c^k)(a + b + c)^{2-k} \geq 3^{2-k} (ab + bc + ca) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$(a^k + b^k + c^k)(a + b + c)^{2-k} \geq \left( a^{\frac{2}{3-k}} + b^{\frac{2}{3-k}} + c^{\frac{2}{3-k}} \right)^{3-k}$$

Do nội (1) là hệ quả của

$$C_k \left( a^{\frac{2}{3-k}} + b^{\frac{2}{3-k}} + c^{\frac{2}{3-k}} \right)^{3-k} \geq 3^{2-k} (ab + bc + ca) \quad (2)$$

Nếu  $A = a^{\frac{2}{3-k}}, B = b^{\frac{2}{3-k}}, C = c^{\frac{2}{3-k}}$  và  $\lambda = \frac{3-k}{2}$  thì (2) tương đương với

$$C_k \left( \frac{A+B+C}{3} \right)^{2\lambda} \geq \frac{(AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda}{3} \quad (3)$$

Do cả hai vế của (3) đồng bậc nên không mất tính tổng quát, có thể giả sử

$A + B + C = 3$ . Khi nội (3) trở thành

$$(AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda \leq 3C_k$$

$$\Leftrightarrow (AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda \leq \max \left\{ 3, \left( \frac{3}{2} \right)^{2\lambda} \right\} \quad (4)$$

Áp dụng kết quả của Bài 45, ta suy ra (4) đúng.

$\Rightarrow \text{đpcm.}$

Kết luận

$$+ k \geq 1 \vee k \leq 0 \Rightarrow C_k = 1$$

$$+ 0 < k < 1 \Rightarrow C_k = \max \left\{ 1, \frac{3^{2-k}}{2^{3-k}} \right\}.$$

**Bài toán 46.**

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  sao cho

$$a(a+b)^n + b(b+c)^n + c(c+a)^n \geq 0$$

*Lời giải.*

Nhận xét rằng  $n$  phải lẻ

Nếu  $n \geq 6$  thì cho  $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{9}{4}, c = 1$ . Khi đó ta có

$$a(a+b)^n + b(b+c)^n + c(c+a)^n = 13 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{n-2} - 2^{n-2} < 0 \quad \forall n \geq 6$$

Do đó  $n \leq 5$  mà  $n$  lẻ nên  $n = 1 \vee n = 3 \vee n = 5$ . Ta sẽ chứng minh rằng tất cả những giá trị cần tìm, tức là chứng minh

$$a(a+b) + b(b+c) + c(c+a) \geq 0 \quad (1)$$

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq 0 \quad (2)$$

$$a(a+b)^5 + b(b+c)^5 + c(c+a)^5 \geq 0 \quad (3)$$

\* Chứng minh (1).

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot ((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2) \geq 0 \quad (\text{đúng})$$

\* Chứng minh (2).

$$\text{Ñat} \begin{cases} 2z = a + b \\ 2y = c + a \\ 2x = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = x - y + z \\ c = x + y - z \end{cases}$$

Ta coi

$$(2) \Leftrightarrow 8(x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^3y - y^3z - z^3x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4 \left( \sum_{\text{cyc}} (x^2 - y^2 - xy)^2 + \sum_{\text{cyc}} x^2 y^2 \right) \geq 0 \text{ (ñuंग)}$$

\* Chöng minh (3).

$$\text{Ñat} \begin{cases} 2z = a + b \\ 2y = c + a \\ 2x = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = x - y + z \\ c = x + y - z \end{cases}$$

Ta coi

$$(3) \Leftrightarrow 32(x^6 + y^6 + z^6 + xy^5 + yz^6 + zx^5 - x^5y - y^5z - z^5x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow 16 \sum_{\text{cyc}} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2 - xy)^2 \geq 0 \text{ (ñuंग)}$$

Vây tại cáic cáic giáitở  $n$  cáin tìm laỏ  $n = 1, n = 3, n = 5$ .

**Báit toáin 47.**

Cho  $a, b, c, d > 0$  thoả  $a + b + c + d = 4$ . Chöng minh ráng

$$\frac{a^2}{b^2 + 3} + \frac{b^2}{c^2 + 3} + \frac{c^2}{d^2 + 3} + \frac{d^2}{a^2 + 3} \geq 1$$

*Löi giáit.*

Áp dụng báit ñáing thöic Bunhiacopxki, ta coi

$$\frac{a^2}{b^2 + 3} + \frac{b^2}{c^2 + 3} + \frac{c^2}{d^2 + 3} + \frac{d^2}{a^2 + 3} \geq \\ = \frac{a^4}{a^2 b^2 + 3a^2} + \frac{b^4}{b^2 c^2 + 3b^2} + \frac{c^4}{c^2 d^2 + 3c^2} + \frac{d^4}{d^2 a^2 + 3d^2} \\ \geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 d^2 + d^2 a^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2 = (a^2 + c^2)(b^2 + d^2) \leq \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức này cho, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 &\geq 3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + \frac{1}{4} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 4 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq \frac{1}{4} \cdot (a + b + c + d)^2 \text{ (theo bất đẳng thức Bunhiacopski)} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

### Bài toán 48.

Cho  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là  $n$  số thực dương thỏa  $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+a_i} = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{a_i} \geq (n-1) \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_i}}$$

*Lời giải.*

Đặt  $x_i = \frac{1}{1+a_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ) thì ta có  $x_i > 0$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$  và  $a_i = \frac{1-x_i}{x_i}$  ( $i = \overline{1, n}$ ).

Khi đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{1-x_i}{x_i}} &\geq (n-1) \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{x_i}{1-x_i}} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{1-nx_i}{\sqrt{x_i(1-x_i)}} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n - nx_i}{\sqrt{x_i(1-x_i)}} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} (x_i - x_j) \left( \frac{1}{\sqrt{x_j(1-x_j)}} - \frac{1}{\sqrt{x_i(1-x_i)}} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{(x_i - x_j) (\sqrt{x_i(1-x_i)} - \sqrt{x_j(1-x_j)})}{\sqrt{x_i x_j (1-x_i)(1-x_j)}} &\geq 0 \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow \sum_{i \neq j} \frac{(x_i - x_j)^2 (1 - x_i - x_j)}{\left(\sqrt{x_i(1-x_i)} + \sqrt{x_j(1-x_j)}\right) \sqrt{x_i x_j (1-x_i)(1-x_j)}} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài toán 49. (Poland 1990)

Cho  $n \geq 3$  và  $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n-1$$

trong đó  $x_{n+1} = x_1$  và  $x_{n+2} = x_2$ .

*Lời giải.*

Ta chứng minh bằng quy nạp.

+  $n = 3$  Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^2}{x^2 + yz} \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x^2 + yz} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x^2 + yz} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{y^2 z^2}{x^2 yz + y^2 z^2} \\ &\geq \frac{(xy + yz + zx)^2}{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 yz + xy^2 z + xyz^2} \\ &= \frac{(xy + yz + zx)^2}{(xy + yz + zx)^2 - x^2 yz - xy^2 z - xyz^2} \end{aligned}$$

Nhưng ta lại có  $\frac{(xy + yz + zx)^2}{(xy + yz + zx)^2 - x^2 yz - xy^2 z - xyz^2} \geq 1$ , do đó  $\sum_{\text{cyc}} \frac{yz}{x^2 + yz} \geq 1$

Vậy khẳng định đúng khi  $n = 3$ .

+ Giải xuôi khẳng định đúng cho  $n$  biến số ta sẽ chứng minh nó cũng đúng cho  $n+1$  biến số

Không mất tính tổng quát, ta coi thể giảisố  $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$ .

Ta cần phải chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n \quad (*)$$

Theo giảthiết quy nạp, ta coi  $\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{x_i^2 + x_{i+1}x_{i+2}} \leq n-1$ . Do ñđi ñđi chứng minh (\*), ta

chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2 + x_1x_2} + \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_{n+1}x_1} + \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_{n+1}} - \frac{x_n^2}{x_n^2 + x_1x_2} - \frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \left(1 - \frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2 + x_1x_2}\right) + x_n^2 \cdot \left(\frac{1}{x_n^2 + x_1x_2} - \frac{1}{x_n^2 + x_{n+1}x_1}\right) + \\ & + x_{n-1}^2 \cdot \left(\frac{1}{x_{n-1}^2 + x_nx_1} - \frac{1}{x_{n-1}^2 + x_nx_{n+1}}\right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x_1x_2}{x_{n+1}^2 + x_1x_2} + \frac{x_n^2x_1(x_{n+1} - x_2)}{(x_n^2 + x_1x_2)(x_n^2 + x_{n+1}x_1)} + \frac{x_{n-1}^2x_n(x_{n+1} - x_1)}{(x_{n-1}^2 + x_nx_1)(x_{n-1}^2 + x_nx_{n+1})} \geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy khẳng ñđi ñđi cho  $n+1$  biến số. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng ñđi ñđi cho mỗi  $n \geq 3$ .

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài toán 50.

Cho  $a, b, c, d$  là các số thực thoả mãn  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \leq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a+b)^4 + (a+c)^4 + (a+d)^4 + (b+c)^4 + (b+d)^4 + (c+d)^4$$

### Lời giải.

Ta coi

$$(a+b)^4 \leq (a-b)^4 + (a+b)^4 = 2(a^4 + b^4 + 6a^2b^2)$$

Tổng cộng, ta coi

$$\begin{aligned}(a+c)^4 &\leq 2(a^4+c^4+6a^2c^2) \\(a+d)^4 &\leq 2(a^4+d^4+6a^2d^2) \\(b+c)^4 &\leq 2(b^4+c^4+6b^2c^2) \\(b+d)^4 &\leq 2(b^4+d^4+6b^2d^2) \\(c+d)^4 &\leq 2(c^4+d^4+6c^2d^2)\end{aligned}$$

Do ñoài

$$\begin{aligned}P &\leq 6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2) \\&= 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \\&\leq 6\end{aligned}$$

Ñáng thòi xảy ra khi và chæ khi  $a=b=c=d=\pm\frac{1}{2}$ .

Vây  $\max P = 6$ .

**Bài toán 51. (Phạm Kim Hưng)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$f(a, b, c) = \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{4}{a+b+c}$$

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát, coi ñe giaisiso  $a \geq b \geq c > 0$ .

Ta sẽ chứng minh  $f(a, b, c) \geq f(t, t, c)$ , trong ñoài  $t = \frac{a+b}{2} \geq c$ .

Thật vây, áp dụng bất ñáng thòi AM-GM, ta coi

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} \geq \frac{2}{\sqrt[4]{(4a^2+bc)(4b^2+ca)}}$$

Mặt khác, ta coi

$$\begin{aligned}&\left(4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{(a+b)c}{2}\right)^2 - (4a^2+bc)(4b^2+ca) = \\&= (a-b)^2\left(a^2+b^2+6ab+\frac{c^2}{4}-3ac-3bc\right) \geq 0 \quad (\text{do } a \geq b \geq c > 0)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} \geq \frac{2}{\sqrt{(4a^2+bc)(4b^2+ca)}} \geq \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}$$

Cũng theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \geq \frac{1}{\sqrt{4c^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}$$

Do ão

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}} + \frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \\ &\geq \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} \\ &= f(t,t,c) \end{aligned}$$

Vây ãe chứng minh  $f(a,b,c) \geq \frac{4}{a+b+c}$ , ta chæ cần chứng minh

$$\begin{aligned} f(t,t,c) &\geq \frac{4}{2t+c} \\ \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}} + \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} &\geq \frac{4}{2t+c} \\ \Leftrightarrow \left( \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}} - \frac{1}{t} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} - \frac{1}{t} \right) &\geq \left( \frac{4}{2t+c} - \frac{2}{t} \right) \\ \Leftrightarrow c \cdot \left( \frac{2}{t(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc} \cdot (2t+\sqrt{4t^2+tc})} - \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{t(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc} \cdot (2t+\sqrt{4t^2+tc})} - \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \left( \frac{1}{3t(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc} \cdot (2t+\sqrt{4t^2+tc})} \right) + & \end{aligned}$$

$$+ \left( \frac{5}{3t(2t+c)} - \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} \right) \geq 0$$

Nhờ vậy, để chứng minh  $f(t,t,c) \geq \frac{4}{2t+c}$ , ta cần chứng minh

$$\frac{1}{3t(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc} \cdot (2t+\sqrt{4t^2+tc})} \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{5}{3t(2t+c)} - \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} \geq 0 \quad (2)$$

\* Chứng minh (1).

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3t(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t^2+tc} \cdot (2t+\sqrt{4t^2+tc})} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{3(2t+c)} - \frac{1}{\sqrt{4t+c} \cdot (2\sqrt{t}+\sqrt{4t+c})} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{4t+c} \cdot (2\sqrt{t}+\sqrt{4t+c}) \geq 3(2t+c) \\ \Leftrightarrow & 2\sqrt{4t^2+tc} + 4t+c \geq 6t+3c \\ \Leftrightarrow & \sqrt{4t^2+tc} \geq t+c \quad (\text{nhìng do } t \geq c) \\ \Rightarrow & (1) \text{ nhìng.} \end{aligned}$$

\* Chứng minh (2).

Ta có

$$\begin{aligned} & \frac{5}{3t(2t+c)} - \frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{5}{3(2t+c)} - \frac{4c}{\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2})} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 5\sqrt{4c^2+t^2} \cdot (t+\sqrt{4c^2+t^2}) \geq 12c(2t+c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow 5t\sqrt{4c^2+t^2} + 5(4c^2+t^2) \geq 12c(2t+c) \\
&\Leftrightarrow 5t\sqrt{4c^2+t^2} + 8c^2 + 5t^2 \geq 24tc \\
&\Leftrightarrow 25t^2(4c^2+t^2) \geq (8c^2+5t^2-24tc)^2 \\
&\Leftrightarrow 4c(60t^3-139t^2c+96tc^2-16c^3) \geq 0 \quad (\text{nhìng do } t \geq c) \\
&\Rightarrow (2) \text{ nhìng.} \\
&\Rightarrow \text{nhìpcm.}
\end{aligned}$$

Nhìng thòic xay ra khi vaichæ khi  $a = b, c = 0$  vaichæ hoan vì tòng òng.

### Bai toan 52. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $x, y, z > 0$ . Chòng minh rang

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} \geq 1 + \sqrt{1 + \sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right)}}$$

*Lòì giai.*

Nhìt  $a^2 = x+y+z, b^2 = xy+yz+zx, c^2 = xyz$  ( $a, b, c > 0$ ) thì ta coi  $ab \geq 3c > 0$ .

Khi nhòì ta coi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} &= \frac{b^2}{c^2} \\
x^2 + y^2 + z^2 &= a^4 - 2b^2 \\
\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= \frac{b^4 - 2a^2c^2}{c^4}
\end{aligned}$$

Do nhòì bai nhìng thòic cần chòng minh tòng nhòng vòì

$$\begin{aligned}
\frac{ab}{c} &\geq 1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2c^2)}{c^4}}} \\
\Leftrightarrow ab - c &\geq \sqrt{c^2 + \sqrt{(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2c^2)}} \\
\Leftrightarrow (ab - c)^2 &\geq c^2 + \sqrt{(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2c^2)} \\
\Leftrightarrow a^2b^2 - 2abc &\geq \sqrt{(a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2c^2)} \\
\Leftrightarrow (a^2b^2 - 2abc)^2 &\geq (a^4 - 2b^2)(b^4 - 2a^2c^2)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2(b^3 - a^3c)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z$ .

### Bài toán 53. (Mildorf)

cho  $a, b, c > 0, k \in \mathbf{R}$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \max(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 \geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc} \min(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2$$

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát, coi thế giới với  $a \geq b \geq c > 0$ .

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $k \geq 0 \Rightarrow a^k \geq b^k \geq c^k > 0$ .

Trước hết, ta chứng minh

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \max(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 &\geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \\ \Leftrightarrow a^k (a-b)^2 + a^k (a-c)^2 + b^k (b-c)^2 &\geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \end{aligned}$$

Chú ý rằng  $(a-b)^2 + (a-c)^2 = (b-c)^2 + 2(a-b)(a-c)$ , nên bất đẳng thức trên

tương đương với

$$\begin{aligned} a^k (b-c)^2 + b^k (b-c)^2 + 2a^k (a-b)(a-c) &\geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \\ \Leftrightarrow a^k (b-c)^2 + b^k (b-c)^2 &\geq 2b^k (b-a)(b-c) + 2c^k (c-a)(c-b) \\ \Leftrightarrow a^k (b-c) + b^k (b-c) + 2b^k (a-b) - 2c^k (a-c) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (a^k + b^k - 2c^k)(b-c) + 2(b^k - c^k)(a-b) &\geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) &\geq \sum_{cyc} \min(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) &\geq b^k (a-b)^2 + c^k (a-c)^2 + c^k (b-c)^2 \end{aligned}$$

Chú ý rằng  $(a-c)^2 + (b-c)^2 = (a-b)^2 + 2(c-a)(c-b)$ , nên bất đẳng thức trên tương đương với

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) &\geq b^k (a-b)^2 + c^k (a-b)^2 + 2c^k (c-a)(c-b) \\ \Leftrightarrow 2a^k (a-b)(a-c) + 2b^k (b-a)(b-c) &\geq b^k (a-b)^2 + c^k (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow 2a^k (a-c) - 2b^k (a-b)(b-c) &\geq b^k (a-b) + c^k (a-b) \\ \Leftrightarrow 2(a^k - b^k)(a-b) + (2a^k - b^k - c^k)(b-c) &\geq 0 \text{ (đúng)} \end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này, ta có

$$\sum_{cyc} \max(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 \geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc} \min(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2$$

\* Trường hợp 2.  $k < 0 \Rightarrow a^k \leq b^k \leq c^k$ .

Lập luận tương tự trường hợp 1, ta cũng có

$$\sum_{cyc} \max(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 \geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc} \min(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \max(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 &\geq 2 \sum_{cyc} a^k (a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc} \min(a^k, b^k) \cdot (a-b)^2 \\ \Rightarrow \text{đpcm} \end{aligned}$$

### Bài toán 54. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $\Delta ABC$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2 - \cos A} + \frac{1}{2 - \cos B} + \frac{1}{2 - \cos C} \geq 2$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (2 - \cos A)(2 - \cos B) &\geq 2(2 - \cos A)(2 - \cos B)(2 - \cos C) \\ \Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} \cos A - 2 \sum_{cyc} \cos A \cdot \cos B + 3 \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - 4 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4 \cos C + 8 \sin \frac{C}{2} \cdot t - 6 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos C \cdot t - 3t^2 + 3 \cos^2 \frac{C}{2} + \end{aligned}$$



$$+ 2 \cos C \cdot t^2 - 2 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 4 \geq 0 \quad (*)$$

trong đó  $t = \cos \frac{A-B}{2} \Rightarrow 1 \geq t \geq \sin \frac{C}{2}$  (do  $0 \leq \frac{A-B}{2} \leq \frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$ )

Nhặt  $VT(*) = f(t)$

Ta có

$$f''(t) = 2(2 \cos C - 3) < 0$$

$$\Rightarrow f(t) \text{ là hàm lồi trên } \left[ \sin \frac{C}{2}, 1 \right].$$

$$\Rightarrow f(t) \geq \min \left\{ f \left( \sin \frac{C}{2} \right), f(1) \right\}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f \left( \sin \frac{C}{2} \right) &= 4 \cos C + 8 \sin^2 \frac{C}{2} - 6 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 3 \sin^2 \frac{C}{2} + \\ &\quad + 3 \cos^2 \frac{C}{2} + 2 \cos C \cdot \sin^2 \frac{C}{2} - 2 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 4 \\ &= 4 \cos C + 5 \sin^2 \frac{C}{2} + 3 \cos^2 \frac{C}{2} - 4 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 2 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 4 \\ &= 4 \cos C + 2 \sin^2 \frac{C}{2} + 3 - 2 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 2 \cos C - 4 \\ &= 2 \cos C + 2 \sin^2 \frac{C}{2} \cdot (1 - \cos C) - 1 \\ &= 2 \cos C + (1 - \cos C)^2 - 1 \\ &= \cos^2 C \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Ta lại có

$$\begin{aligned} f(1) &= 4 \cos C + 8 \sin \frac{C}{2} - 6 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos C - 3 + 3 \cos^2 \frac{C}{2} + \\ &\quad + 2 \cos C - 2 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 4 \\ &= 6 \cos C + 8 \sin \frac{C}{2} - 3 \sin^2 \frac{C}{2} - 6 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos C - 2 \cos^2 \frac{C}{2} \cdot \cos C - 4 \end{aligned}$$

$$= \sin \frac{C}{2} \cdot \left( 2 \sin \frac{C}{2} - 1 \right)^2 \left( 2 - \sin \frac{C}{2} \right) \geq 0$$

Vậy ta có  $f\left(\sin \frac{C}{2}\right) \geq 0$  và  $f(1) \geq 0 \Rightarrow \min \left\{ f\left(\sin \frac{C}{2}\right), f(1) \right\} \geq 0$

$$\Rightarrow f(t) \geq \min \left\{ f\left(\sin \frac{C}{2}\right), f(1) \right\} \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$  hoặc  $A = B \rightarrow \frac{\pi}{2}, C \rightarrow 0$  và các

hoán vị tương ứng.

### Bài toán 55.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$(a+b+c) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\begin{aligned} & (a+b+c) \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{c} + a+b+c \geq 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^2}{b} + b - 2a \right) + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{c} - a - b - c \right) \geq 3 \left( \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} - a - b - c \right) \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} \frac{c(a-b)^2}{ab} \geq \frac{3 \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + a + b + c} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\frac{3 \sum_{\text{cyc}} (a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)} + a + b + c} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sum_{\text{cyc}} (a-b)^2}{a + b + c}$$

Do nội nội chúng minh bất năng thời nào cho, ta cần chứng minh

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2}{ab} &\geq \frac{3}{2} \cdot \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2}{b} + \sum_{cyc} \frac{c(a-b)^2}{ab} &\geq 3 \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a+b+c} \right) + \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{c}{ab} - \frac{1}{a+b+c} \right) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+c)}{b(a+b+c)} + \frac{1}{abc(a+b+c)} \cdot \sum_{cyc} (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) &\geq 0 \end{aligned}$$

Đã thay  $2 \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+c)}{b(a+b+c)} \geq 0$ . Do nội ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c > 0 \Rightarrow a - c \geq a - b \geq 0$ .

Khi nội ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) &= \\ &= (b-c)^2(a^2 + ab + ac - bc) + (a-c)^2(b^2 + ab + bc - ac) + \\ &\quad + (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) \\ &\geq (a-c)^2(b^2 + ab + bc - ac) + (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) \\ &\geq (a-b)^2(b^2 + ab + bc - ac) + (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) \\ &= (a-b)^2(b+c)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Vậy  $\sum_{cyc} (a-b)^2(c^2 + ac + bc - ab) \geq 0$

$\Rightarrow$  đpcm.

Năng thời xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài toán 56. (Leã Trung Kiên)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{3a(b+c)}{a^2+2bc} \leq 6 + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \left( 2 - \frac{3a(b+c)}{a^2+2bc} \right) + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{2a^2 - 3a(b+c) + 4bc}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b) - (a-2b)(c-a)}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{(b-2c)(a-b)}{b^2+2ca} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(-4c^2 + 4c(a+b) - ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)} + \frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b)^2(-4c^2 + 4c(a+b) - ab)(c^2+2ab) + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) + \sum_{cyc} (a-b)^2(-4c^2 + 4c(a+b) - 4ab)(c^2+2ab) + \\ & \qquad \qquad \qquad + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) + 4(a-b)(b-c)(c-a) \cdot \sum_{cyc} (a-b)(c^2+2ab) + \\ & \qquad \qquad \qquad + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 + \\ & \qquad \qquad \qquad + 6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi này ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) &\geq ab(a-b)^2(c^2+2ab) \\ &\geq 2a^2b^2(a-b)^2 \\ &\geq 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 &\geq 0 \\ \Rightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} &\leq 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \quad (\text{ñpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c = 0$  và các hoán vị.

### Bài toán 57.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq (1+a)(1+b)(1+c) - 2(1+abc)$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} &\geq -1+a+b+c+ab+bc+ca-abc \\ \Leftrightarrow 2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) &\geq (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Chuyển vế ta có } (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (-1+ab+bc+ca)^2 + (a+b+c-abc)^2$$

Do vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 2(-1+ab+bc+ca)^2 + 2(a+b+c-abc)^2 &\geq (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2 \\ \Leftrightarrow (-1+ab+bc+ca-a-b-c+abc)^2 &\geq 0 \quad (\text{đúng}) \\ \Rightarrow \text{ñpcm.} \end{aligned}$$

\* Cách 2.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \geq -1+a+b+c+ab+bc+ca-abc$$

$$\Leftrightarrow 2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \geq (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2$$

Đặt  $a = \operatorname{tg}A, b = \operatorname{tg}B, c = \operatorname{tg}C$  ( $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}$ ). Khi đó bất đẳng thức cần chứng

minh tương đương với

$$\frac{2}{\cos^2 A \cdot \cos^2 B \cdot \cos^2 C} \geq \left( -1 + \sum_{\text{cyc}} \frac{\sin A}{\cos A} + \sum_{\text{cyc}} \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B} - \frac{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq \left( \sum_{\text{cyc}} \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C + \right.$$

$$\left. + \sum_{\text{cyc}} \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C - \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \right)^2$$

Chứng minh

$$\sin(A+B+C) = \sum_{\text{cyc}} \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$\cos(A+B+C) = \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C - \sum_{\text{cyc}} \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2 \geq (\sin(A+B+C) - \cos(A+B+C))^2 \text{ (hiển nhiên đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

**Bài toán 58. (France 2004)**

Cho  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$  thỏa  $a+b+c+d+e+f=0$ . Chứng minh rằng

$$ab+bc+cd+de+ef+fa \leq \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

$$\text{Ta có } (a+c+e)(b+d+f) = -(a+c+e)^2 \leq 0$$

Mặt khác, ta có

$$(a+c+e)(b+d+f) = (ab+bc+cd+de+ef+fa) + (ad+be+fc)$$

Do ñoù

$$\begin{aligned} ab+bc+cd+de+ef+fa &\leq -ad-be-fc \\ &\leq \frac{a^2+d^2}{2} + \frac{b^2+e^2}{2} + \frac{c^2+f^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

\* **Cách 2.**

Ñặt

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \\ B &= ab + bc + cd + de + ef + fa \\ C &= ac + bd + ce + df + ea + fb \\ D &= ad + be + cf \end{aligned}$$

Khi ñoù ñeà chöng minh bất ñaêng thöïc ñaño cho, ta cần chöng minh  $A \geq 2B$

Theo giả ù thiết, ta coi

$$(a+b+c+d+e+f)^2 = A + 2B + 2C + 2D = 0$$

Ta lại coi

$$\begin{aligned} (a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 &= A + 2D \\ (a+c+e)^2 + (b+d+f)^2 &= A + 2C \end{aligned}$$

Vì tổng các bình phương luôn không âm nên ta coi

$$(a+d)^2 + (b+e)^2 + (c+f)^2 + (a+c+e)^2 + (b+d+f)^2 = 2A + 2C + 2D \geq 0$$

Theo trên, ta coi  $A + 2B + 2C + 2D = 0$

Do ñoù

$$\begin{aligned} 2A + 2C + 2D &\geq A + 2B + 2C + 2D \\ \Rightarrow A &\geq 2B \\ \Rightarrow &\text{ñpcm.} \end{aligned}$$

**Bài toán 59. (Voi Quốc Bài Cẩn)**

Cho  $x, y > 0$ . Chứng minh rằng

$$4y^2\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)} + 8x^2y\sqrt{x^2+3y^2} + 4x(x^2+y^2)\sqrt{y^2+3x^2} \leq 3(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)$$

*Lời giải.*

Ta coi Boolean sau

Boolean  $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  thì

$$\sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

*Chứng minh.*

Xét hàm số  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \cdot \sin 2x$  với  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có  $f'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (1 + \cos x)(2\cos x - 1)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

Qua  $\frac{\pi}{3}$  thì  $f'(x)$  đổi dấu từ dương sang âm, nên

$$f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Boolean này có chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta

Ta coi bất đẳng thức cần chứng minh tổng không với

$$\frac{y^2\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}} + \frac{2x^2y\sqrt{3}}{(y^2+3x^2)\sqrt{x^2+3y^2}} + \frac{x(x^2+y^2)\sqrt{3}}{(x^2+3y^2)\sqrt{y^2+3x^2}} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Chứng minh



$$\frac{y^2\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+3y^2}} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}}$$

$$\frac{2x^2y\sqrt{3}}{(y^2+3x^2)\sqrt{x^2+3y^2}} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{y^2+3x^2}} \cdot \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}$$

$$\frac{x(x^2+y^2)\sqrt{3}}{(x^2+3y^2)\sqrt{y^2+3x^2}} = \sqrt{1 - \frac{4x^2y^2}{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

Mañ khai:  $0 < \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}}, \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}} < 1.$

Do ñoij ta coi thei ñaai

$$\cos A = \frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}, \cos B = \frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}}, \cos C = \frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}$$

trong ñoi  $0 < A, B, C < \frac{\pi}{2}.$

Khi ñoij bañ ñaang thoi cañ choiing minh toang ñoong voi

$$\sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Mañ khai, toi cañ ñaai, ta coi

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 1$$

$$\Rightarrow A + B + C = \pi.$$

Do  $\frac{\pi}{2} > A, B, C > 0$  neñ  $(\sin A, \sin B, \sin C)$  vaø  $(\cos A, \cos B, \cos C)$  laø 2 daøy ñon

ñieu ngooic chieu.

$\Rightarrow$  Theo bañ ñaang thoi sap xep lai, ta coi

$$\begin{aligned} \sin A \cdot \cos B + \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A &\leq \sin A \cdot \cos C + \sin B \cdot \cos B + \sin C \cdot \cos A \\ &= \sin B + \frac{1}{2} \cdot \sin 2B \\ &\leq \frac{3\sqrt{3}}{4} \quad (\text{theo Boañeatreñ}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

Giá trị xảy ra khi và chỉ khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = y$ .

**Bài toán 60. (Phạm Kim Hưng)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Tìm hằng số  $k$  nhỏ nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$$

*Lời giải.*

Cho  $b = c = 1, a \rightarrow 0^+$ , ta suy ra  $k \geq \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 = n$ .

Ta sẽ chứng minh  $k_{\min} = n$ , tiếp tục chứng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n \geq \frac{3}{2^n}$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq \frac{1}{3}$ .

$$\text{Đặt } \begin{cases} c+b=2t \\ c-b=2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=t-m \\ c=t+m \\ t > m \geq 0 \end{cases}$$

Xét hàm số  $f(m) = \frac{(t+m)^n}{(t-m+a)^n} + \frac{(t-m)^n}{(t+m+a)^n}$  với  $m \geq 0$ .

$$\text{Ta có } f'(m) = n(2t+a) \left( \frac{(t+m)^{n-1}}{(t-m+a)^{n+1}} - \frac{(t-m)^{n-1}}{(t+m+a)^{n+1}} \right)$$

Ta sẽ chứng minh  $f'(m) \geq 0 \quad \forall m \geq 0$ .

Thật vậy

$$\begin{aligned} f'(m) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (1-n)(\ln(t+m) - \ln(t-m)) &\leq (n+1)(\ln(t+m+a) - \ln(t-m+a)) \end{aligned}$$

Do  $\frac{1+n}{1-n} > 2$  nên ta cần chứng minh

$$\ln(t+m) - \ln(t-m) \leq 2(\ln(t+m+a) - \ln(t-m+a))$$

Xét hàm số  $g(m) = \ln(t+m) - \ln(t-m) - 2\ln(t+m+a) + 2\ln(t-m+a)$

Ta có  $g'(m) = \frac{1}{m+t} - \frac{1}{t-m} - \frac{2}{a+t+m} - \frac{2}{a+t-m} \leq 0$  (do  $a \leq b \leq c$ )

$\Rightarrow g(m)$  là hàm nghịch biến trên  $[0, +\infty)$ .

$$\Rightarrow g(m) \leq g(0) = 0 \quad \forall m \geq 0$$

$$\Rightarrow \ln(t+m) - \ln(t-m) \leq 2(\ln(t+m+a) - \ln(t-m+a))$$

$$\Rightarrow f'(m) \geq 0$$

$\Rightarrow f(m)$  là hàm đồng biến trên  $[0, +\infty)$ .

$$\Rightarrow f(m) \geq f(0) = 2\left(\frac{t}{t+a}\right)^n = 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n \quad \forall m \geq 0$$

Do ñ

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n &= \frac{(t+m)^n}{(t-m+a)^n} + \frac{(t-m)^n}{(t+m+a)^n} + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n \\ &\geq 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n + \left(\frac{a}{1-a}\right)^n \\ &= h(a) \end{aligned}$$

Ta có  $h'(a) = n\left(\frac{a^{n-1}}{(1-a)^{n+1}} - \frac{4(1-a)^{n-1}}{(1+a)^{n+1}}\right)$

$$h'(a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 = (n+1)\ln(1+a) - 2n\ln(1-a) + (n-1)\ln a$$

Ñặt  $\varphi(a) = (n+1)\ln(1+a) - 2n\ln(1-a) + (n-1)\ln a$

Ta có  $\varphi'(a) = \frac{n+1}{1+a} + \frac{2n}{1-a} - \frac{1-n}{a} = \frac{(3n+1)a + n-1}{a(1-a^2)}$

$$\Rightarrow \varphi'(a) > 0 \text{ với } a_0 = \frac{1-n}{3n+1} < \frac{1}{3} \left( \text{do } n = \frac{\ln 3}{\ln 2} - 1 > \frac{1}{3} \right)$$

Qua  $a_0$  thì  $\varphi'(a)$  luôn dương đồng biến và  $\lim_{a \rightarrow 0} \varphi(a) = +\infty, \varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \ln 4$  nên

phương trình  $\varphi(a) = \ln 4$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $\frac{1}{3}$  và  $0 < a_1 < \frac{1}{3}$ .

$\Rightarrow$  phương trình  $h'(a) = 0$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $\frac{1}{3}$  và  $a_1$ .

Qua  $a_1$  thì  $h'(a)$  luôn dương đồng biến, qua  $\frac{1}{3}$  thì  $h'(a)$  luôn dương đồng

biến nên ta có

$$h(a) \geq \min \left\{ h(0), h\left(\frac{1}{3}\right) \right\} = \frac{3}{2^n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n \geq \frac{3}{2^n}$$

Vậy  $k_{\min} = n$ .

### Bài toán 61. (Trần Nam Dũng)

Cho  $x > 0$ . Tìm hằng số  $s$  đồng nhất sao cho

$$2\left(x^s + \frac{1}{x^s} + 1\right) \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

*Lời giải.*

Rõ ràng với  $x = 1$  thì bất đẳng thức nào cho đều thành đẳng thức. Do nội không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét  $x > 1$  là đủ. Khi đó ta có

$$2\left(x^s + \frac{1}{x^s} + 1\right) \geq 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^s - 1)^2}{x^s} \geq \frac{3(x-1)^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^s - 1}{x-1} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{s-1}{2}}$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại  $y \in (1, x)$  sao cho

$$\frac{x^s - 1}{x - 1} = (y^s)' = sy^{s-1}$$

Do ñoù

$$\frac{x^s - 1}{x - 1} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow sy^{s-1} \geq \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{s-1}{2}}$$

Cho  $x \rightarrow 1^+$  thì  $y \rightarrow 1^+$ , ta suy ra ñiều kiện  $s \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Ta sẽ chứng minh ñây là giá trị

cần tìm. Nếu ñiều kiện này, ta cần chứng minh  $\frac{x^s - 1}{x - 1} \geq s \cdot x^{\frac{s-1}{2}} \quad \forall x, s > 1$  là ñúng

Ta coi

$$\frac{x^s - 1}{x - 1} \geq s \cdot x^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = x^s - 1 - sx^{\frac{s+1}{2}} + sx^{\frac{s-1}{2}} \geq 0$$

Ta coi  $f'(x) = sx^{\frac{s-3}{2}} \cdot \left( \left( x^{\frac{s+1}{2}} - 1 \right) - \frac{(s+1)(x-1)}{2} \right)$

Theo ñịnh lý Lagrange, tồn tại  $z \in (1, x)$  sao cho

$$x^{\frac{s+1}{2}} - 1 = \left( z^{\frac{s+1}{2}} \right)' \cdot (x-1) = z^{\frac{s-1}{2}} \cdot \frac{(s+1)(x-1)}{2} > \frac{(s+1)(x-1)}{2} \quad (\text{do } s, z > 1)$$

$$\Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x > 1$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm ñồng biến trên } (1, +\infty).$$

$$\Rightarrow f(x) \geq \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \quad \forall x > 1$$

Vậy  $s_{\min} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

**Bài toán 62. (Bulgaria 2003)**

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

Bằng cách quy đồng mẫu số và thu gọn, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 2(a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + a + b + c) &\geq \\ &\geq 3(a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow 2(a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + 3) &\geq \\ &\geq 3(a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \cdot (a^2b^3 + a^2b) &\geq 3a^2b^2 \\ \frac{3}{2} \cdot (b^2c^3 + b^2c) &\geq 3b^2c^2 \\ \frac{3}{2} \cdot (c^2a^3 + c^2a) &\geq 3c^2a^2 \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \left( \sum_{cyc} a^2b^3 + \sum_{cyc} a^2b \right) &\geq 3 \left( \sum_{cyc} a^2b^2 \right) \end{aligned} \quad (1)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} 2a^3 + 1 &\geq 3a \\ 2b^3 + 1 &\geq 3b \\ 2c^3 + 1 &\geq 3c \\ \Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3 &\geq 3(a + b + c) = 9 \\ \Rightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) &\geq 6 \end{aligned} \quad (2)$$

Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot (a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b + b^2c + c^2a) &\geq 3a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3} \\
&= \frac{3a^2b^2c^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} \\
&\geq \frac{3a^2b^2c^2}{\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2} \\
&= 3a^2b^2c^2 \\
\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + a^2b + b^2c + c^2a) &\geq 3a^2b^2c^2 \quad (3)
\end{aligned}$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2) và (3) vế theo vế ta được

$$\begin{aligned}
2(a^2b^3 + b^2c^3 + c^2a^3 + a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + b^2c + c^2a + 3) &\geq \\
\geq 3(a^2b^2c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + a^2 + b^2 + c^2) & \\
\Rightarrow \text{hpcm.} &
\end{aligned}$$

\* Cách 2.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b^2+1} - a\right) + \left(\frac{b}{c^2+1} - b\right) + \left(\frac{c}{a^2+1} - c\right) &\geq \frac{3}{2} + a + b + c \\
\Leftrightarrow \frac{ab^2}{b^2+1} + \frac{bc^2}{c^2+1} + \frac{ca^2}{a^2+1} &\leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{ab^2}{b^2+1} \leq \frac{ab^2}{2b} = \frac{1}{2} \cdot ab$$

Tương tự, ta có

$$\frac{bc^2}{c^2+1} \leq \frac{1}{2} \cdot ab$$

$$\frac{ca^2}{a^2+1} \leq \frac{1}{2} \cdot ab$$

Do đó

$$\frac{ab^2}{b^2+1} + \frac{bc^2}{c^2+1} + \frac{ca^2}{a^2+1} \leq \frac{1}{2} \cdot (ab+bc+ca) \leq \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Bài toán 63.

Cho  $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  thỏa mãn  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2+1}$$

### Lời giải.

Ta coi Boolean sau

**Boolean**  $n \geq 4, n \in \mathbb{N}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ . Khi đó ta coi

$$4(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) \leq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$$

**Chứng minh.**

Đặt  $f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = 4(a_1a_2 + a_2a_3 + \dots + a_na_1) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$ . Để chứng minh

Boolean trên, ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo  $n$  rằng

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 0$$

+  $n = 4$ , ta coi

$$\begin{aligned} f_4(a_1, a_2, a_3, a_4) &= 4(a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_1) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \\ &= 4(a_1 + a_3)(a_2 + a_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \\ &= -(a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_4(a_1, a_2, a_3, a_4) \leq 0$$

Vậy khẳng định đúng khi  $n = 4$ .

Giải số khẳng định đúng cho  $n - 1$  biến số ( $n \geq 5$ ), ta sẽ chứng minh khẳng định

đúng cho  $n$  biến số



Khoảng mà tính tổng, qua các giá trị số  $a_1 = \max\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) - f_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} + a_n) &= \\ &= 4(a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}a_n + a_n a_1 - a_{n-2}(a_{n-1} + a_n) - (a_{n-1} + a_n)a_1) \\ &= 4(a_{n-1}a_n - a_{n-2}a_n - a_{n-1}a_1) \\ &\leq 0 \\ \Rightarrow f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) &\leq f_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + a_n) \end{aligned}$$

Theo giả thiết quy nạp, ta có

$$f_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1} + a_n) \leq 0$$

Do đó

$$f_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq 0$$

Vậy khẳng định đúng cho  $n$  biến số. Theo nguyên lý quy nạp, khẳng định đúng với mọi  $n \geq 4$ .

Bây giờ chúng ta chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta

Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a_1}{a_2^2 + 1} + \frac{a_2}{a_3^2 + 1} + \dots + \frac{a_n}{a_1^2 + 1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i}{a_{i+1}^2 + 1} - a_i \right) + \sum_{i=1}^n a_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}^2}{a_{i+1}^2 + 1} + 2 \\ &\geq - \sum_{i=1}^n \frac{a_i a_{i+1}^2}{2a_{i+1}} + 2 \quad (\text{theo bđt AM-GM}) \\ &= - \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} + 2 \\ &\geq - \frac{1}{8} (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 + 2 \quad (\text{theo Bô-nê-trê-n}) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất xảy ra bằng hai khi  $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = \dots = a_n = 0$ .

Vậy

$$\min P = \frac{3}{2}$$

#### Bài toán 64.

Cho  $a, b$  là các số thực thỏa  $a + b \neq 0$  và  $x, y > 1$  là các hằng số dương cho trước.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a, b) = \frac{(a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^y}{(a + b)^2}$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM mô hình, ta có

$$\begin{aligned} (a^2 + 1)^x &= x^x \left[ \frac{1}{x} \left( a^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) + \frac{x - 1}{x} \cdot \frac{x + y - 2}{(x + y - 1)(x - 1)} \right]^x \\ &\geq x^x \cdot \frac{(x + y - 2)^{x-1}}{(x + y - 1)^{x-1} (x - 1)^{x-1}} \cdot \left( a^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) \end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$(b^2 + 1)^y \geq y^y \cdot \frac{(x + y - 2)^{y-1}}{(x + y - 1)^{y-1} (y - 1)^{y-1}} \cdot \left( b^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right)$$

Do đó

$$\begin{aligned} (a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^y &\geq x^x y^y \cdot \frac{(x + y - 2)^{x+y-2}}{(x + y - 1)^{x+y-2} (x - 1)^{x-1} (y - 1)^{y-1}} \times \\ &\quad \times \left( a^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) \left( b^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left( a^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) \left( b^2 + \frac{1}{x + y - 1} \right) \geq \left( a \cdot \frac{1}{\sqrt{x + y - 1}} + b \cdot \frac{1}{\sqrt{x + y - 1}} \right)^2 = \frac{1}{x + y - 1} \cdot (a + b)^2$$

Do đó

$$(a^2 + 1)^x (b^2 + 1)^y \geq \frac{x^x y^y (x + y - 2)^{x+y-2}}{(x + y - 1)^{x+y-1} (x - 1)^{x-1} (y - 1)^{y-1}} \cdot (a + b)^2$$

$$\Rightarrow f(a, b) \geq \frac{x^x y^y (x + y - 2)^{x+y-2}}{(x + y - 1)^{x+y-1} (x - 1)^{x-1} (y - 1)^{y-1}}$$

Giá trị nhỏ nhất xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{\frac{y-1}{(x+y-1)(x-1)}} \\ |b| = \sqrt{\frac{x-1}{(x+y-1)(y-1)}} \\ ab > 0 \end{cases}$$

Vậy  $\min f(a, b) = \frac{x^x y^y (x + y - 2)^{x+y-2}}{(x + y - 1)^{x+y-1} (x - 1)^{x-1} (y - 1)^{y-1}}$

\* Ghi chú

Nếu coi mỗi một lời giải ngắn gọn nhỏ trên, ta phải trải qua một bước chọn niềm rồi nhỏ sau

Giá trị số  $M(a_0, b_0)$  là niềm cực trị của hàm số  $f(a, b)$  thì  $(a_0, b_0)$  là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} f'_a = 0 \\ f'_b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (y-1)b^2 + yab - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (x-1)a^2 + (x-y)ab - (y-1)b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (a+b)((x-1)a - (y-1)b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (x-1)a = (y-1)b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a| = \sqrt{\frac{y-1}{(x+y-1)(x-1)}} \\ |b| = \sqrt{\frac{x-1}{(x+y-1)(y-1)}} \\ ab > 0 \end{cases}$$

Tõõnày, ta ñi ñeõn một lời giải hõì “choàng” nhõ trên.

### Bài toán 65. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $n \geq 3, n \in \mathbb{N}, 0 < k \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$  và  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thoã  $a_1 a_2 \dots a_n = 1$ . Chõng minh

ràng

$$\frac{1}{\sqrt{1+ka_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+ka_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+ka_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

### Lời giải.

Ta coi boã ñeõ sau

Boã ñeõ  $a_1, a_2, \dots, a_n$  là  $n$  số thõc dõng thoã maõ

- i)  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$
- ii)  $a_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1, n}$
- iii)  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = C$

và  $f$  là một hàm trên  $(-\infty, +\infty)$  thoã maõ  $f$  lõi trên  $(-\infty, c]$  và lõm trên  $[c, +\infty)$

Ñãit  $F = f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)$

Khi ñõ  $F$  ñãit max khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} \leq a_n$ .

### Chõng minh.

Giãisõ  $a_i, a_{i+1}, \dots, a_n \in [c, +\infty)$ , do  $f$  lõm trên  $[c, +\infty)$  ñeõ

$$f(a_i) + f(a_{i+1}) + \dots + f(a_n) \leq (i-1)f(c) + f(a_i + a_{i+1} + \dots + a_n - (i-1)c)$$

Mãt khãc do  $f$  lõi trên  $(-\infty, c]$  ñeõ

$$(i-1)f(c) + f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_{i-1}) \leq (n-1)f\left(\frac{(i-1)c + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1}}{n-1}\right)$$

Do ñoù

$$F = \sum_{k=1}^n f(a_k) \leq (n-1)f\left(\frac{(i-1)c + a_1 + a_2 + \dots + a_{i-1}}{n-1}\right) + f(a_i + a_{i+1} + \dots + a_n - (i-1)c)$$

Boãñeàñöôc chöng minh.

Tröulãi bài toán của ta

Ñãt  $y_i = ka_i$  ( $i = \overline{1, n}$ )  $\Rightarrow y_1 y_2 \dots y_n = k^n$  vöi  $k = \sqrt[n]{y_1 y_2 \dots y_n} \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$ . Khi ñoù bãt

ñãng thöc cãn chöng minh tröuthanh

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+y_2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+y_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

Không mất tính tổng quát giả sử  $0 < y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ .

Ñãt  $x_1 = \ln y_1, x_2 = \ln y_2, \dots, x_n = \ln y_n$  thì  $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = n \ln k \text{ (do } a_1 a_2 \dots a_n = 1) \end{cases}$

Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^{1/2}}$

Ta có  $f''(x) = \frac{e^x \cdot (e^x - 2)}{4(e^x + 1)^{5/2}}, f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Töñöy ta có  $f$  loã trên  $(-\infty, \ln 2]$  và loãm trên  $[\ln 2, +\infty)$

$\Rightarrow$  Theo boãñeàtreñ, ta có

$$P = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+y_i)^{1/2}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+e^{x_i})^{1/2}} \text{ ñãt max khi } x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} \leq x_n.$$

$$\Rightarrow \max P \leq \max \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{e^t + 1}} + \frac{1}{\sqrt{e^{n \ln k - (n-1)t} + 1}} \right\} (t \leq \ln k)$$

$$= \max \left\{ \frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1} + k^n}} \right\} \quad (x = e^t \leq k) \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm max của hàm số  $g(x) = \frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1} + k^n}}$  với  $x \leq k$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } g'(x) &= \frac{n-1}{2} \cdot \left( \frac{k^n x^{\frac{n-3}{2}}}{(x^{n-1} + k^n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ g'(x) = 0 &\Leftrightarrow k^n x^{\frac{n-3}{2}} \cdot (x+1)^{\frac{3}{2}} = (x^{n-1} + k^n)^{\frac{3}{2}} \\ &\Leftrightarrow k^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-3}{3}} \cdot (x+1) = x^{n-1} + k^n \end{aligned} \quad (2)$$

Đặt  $t = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t \leq k^{\frac{2}{3}}$ . Khi đó phương trình (2) trở thành

$$\begin{aligned} k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} \cdot \left( \frac{3}{t^2} + 1 \right) &= t^{\frac{3(n-1)}{2}} + k^n \\ \Leftrightarrow t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n &= 0 \end{aligned}$$

Xét hàm số  $h(t) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n$  với  $t \leq k^{\frac{2}{3}}$

$$\text{Ta có } h'(t) = \frac{1}{2} t^{\frac{n-5}{2}} \cdot \left( 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} \right)$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} = 0$$

Xét tiếp hàm số  $m(t) = 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}$  với  $t \leq k^{\frac{2}{3}}$

$$\text{Ta có } m'(t) = \frac{3n}{2} t^{\frac{1}{2}} \cdot \left( 2(n-1)t^{\frac{2n-3}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} \right)$$

$$m'(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \left( \frac{k^{\frac{2n}{3}}}{2(n-1)} \right)^{\frac{2}{2n-3}}$$

Do  $0 < k \leq \frac{2n-1}{(n-1)^2}$  nên  $t_0 < k^{\frac{2}{3}}$ . Qua  $t_0$  thì  $m'(t)$  đổi dấu từ âm sang dương nên

$m(t)$  nghịch biến trên  $(0, t_0]$  và đồng biến trên  $\left[ t_0, k^{\frac{2}{3}} \right)$ .

Ta lại có  $m(0) = 3 - n \leq 0, m\left(k^{\frac{2}{3}}\right) = nk^{\frac{2n}{3}}(2-k) > 0$  (do  $2 > \frac{2n-1}{(n-1)^2} \geq k$ )

Nên phương trình  $m(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$ .

$\Rightarrow$  Phương trình  $h'(t) = 0$  có nghiệm duy nhất  $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$

Bảng biến thiên của  $h(t)$

|         |       |       |           |
|---------|-------|-------|-----------|
| $t$     | 0     | $t_1$ | $k^{2/3}$ |
| $h'(t)$ | -     | 0     | +         |
| $h(t)$  | $k^n$ |       | 0         |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có

$h(t) = 0$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $k^{2/3}$  và  $t_2 < t_1$ .

Do nên  $g'(x) = 0$  có 2 nghiệm đồng phân biệt là  $k$  và  $t_2^{3/2} < t_1^{3/2} < k$ .

Bảng biến thiên của  $g(x)$

|         |   |             |     |
|---------|---|-------------|-----|
| $x$     | 0 | $t_2^{3/2}$ | $k$ |
| $g'(x)$ | - | 0           | +   |
| $g(x)$  |   |             |     |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$g(x) \leq \max\{g(0), g(k)\} = \frac{n}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x \leq k \quad (3)$$

Từ (1) và (3), ta suy ra đpcm.

### Bài toán 66.

Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a-b}{b(b+c-a)} + \frac{b-c}{c(c+a-b)} + \frac{c-a}{a(a+b-c)} \geq 0$$

#### Lời giải.

Do  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác nên tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0$$

Nếu vậy, ta có hai cách chứng minh cho bất đẳng thức trên

#### \* Cách 1.

Có 2 trường hợp xảy ra

+ **Trường hợp 1.**  $x \geq y \geq z > 0$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (x-y) \left( \frac{1}{z(y+z)} - \frac{1}{x(z+x)} \right) + (y-z) \left( \frac{1}{z(y+z)} - \frac{1}{y(x+y)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này đúng do  $x \geq y \geq z > 0$ .

+ **Trường hợp 2.**  $z \geq y \geq x > 0$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} & \frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (y-x) \left( \frac{1}{x(z+x)} - \frac{1}{z(y+z)} \right) + (z-y) \left( \frac{1}{y(x+y)} - \frac{1}{z(y+z)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$



Bất đẳng thức này đúng do  $z \geq y \geq x > 0$ .

Tóm lại, trong mỗi trường hợp ta luôn có

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

\* Cách 2.

Ta có

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z} \cdot \frac{1}{z} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{1}{y} \geq \frac{x}{y+z} \cdot \frac{1}{x} + \frac{y}{z+x} \cdot \frac{1}{y} + \frac{z}{x+y} \cdot \frac{1}{z}$$

Nhieu này đúng theo bất đẳng thức sắp xếp lại do  $\left(\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}\right)$  và

$\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}\right)$  là hai dãy ngược chiều nhau.

Vậy ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bài toán 67.**

Cho  $k \geq a, b, c, d > 0$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4 + b^4 + c^4 + d^4}{abcd} \geq \frac{(2k-a)^4 + (2k-b)^4 + (2k-c)^4 + (2k-d)^4}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

**Lời giải.**

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử  $k \geq a \geq b \geq c \geq d > 0$ . Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{abcd} + \frac{(c^2 - d^2)^2}{abcd} + \frac{2(a^2b^2 + c^2d^2)}{abcd} \geq \frac{((2k-a)^2 - (2k-b)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)} +$$

$$+ \frac{((2k-c)^2 - (2k-d)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)} + \frac{2((2k-a)^2(2k-b)^2 + (2k-c)^2(2k-d)^2)}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

Do ñoï ñeà chöng minh baø ñaïng thöïc ñaï cho, ta chæ caïn chöng minh

$$\frac{(a^2 - b^2)^2}{abcd} \geq \frac{((2k - a)^2 - (2k - b)^2)^2}{(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d)} \quad (1)$$

$$\frac{(c^2 - d^2)^2}{abcd} \geq \frac{((2k - c)^2 - (2k - d)^2)^2}{(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d)} \quad (2)$$

$$\frac{2(a^2b^2 + c^2d^2)}{abcd} \geq \frac{2((2k - a)^2(2k - b)^2 + (2k - c)^2(2k - d)^2)}{(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d)} \quad (3)$$

Ta coi

$$\begin{aligned} \frac{(a^2 - b^2)^2}{abcd} &\geq \frac{((2k - a)^2 - (2k - b)^2)^2}{(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d)} \\ \Leftrightarrow (a - b)^2(a + b)^2(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d) &\geq (a - b)^2(4k - a - b)^2abcd \\ \Leftrightarrow (a + b)^2(2k - a)(2k - b)(2k - c)(2k - d) &\geq (4k - a - b)^2abcd \end{aligned}$$

Do  $k \geq c \geq d > 0$  neïn  $(2k - c)(2k - d) \geq cd > 0$ . Do ñoï ñeà chöng minh (1), ta chæ caïn chöng minh

$$\begin{aligned} (a + b)^2(2k - a)(2k - b) &\geq (4k - a - b)^2ab \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \left( \left(2k - \frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \right) &\geq \left(2k - \frac{a + b}{2}\right)^2 \left( \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \right) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a - b}{2}\right)^2 \left( \left(2k - \frac{a + b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \right) &\geq 0 \quad (\text{ñuïng do } k \geq a \geq b > 0) \end{aligned}$$

Vaây (1) ñuïng.

Chöng minh töông töï, ta coi (2) ñuïng.

Tiep theo, ta seï chöng minh (3) ñuïng.

Ta seï chöng minh

$$\frac{ab}{cd} \geq \frac{(2k - c)(2k - d)}{(2k - a)(2k - b)}$$

Thaät vaây

$$\frac{ab}{cd} \geq \frac{(2k - c)(2k - d)}{(2k - a)(2k - b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(2k-a)}{c(2k-c)} \cdot \frac{b(2k-b)}{d(2k-d)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2 - (k-a)^2}{k^2 - (k-c)^2} \cdot \frac{k^2 - (k-b)^2}{k^2 - (k-d)^2} \geq 1 \quad (\text{nh\u00fang do } k \geq a \geq b \geq c > 0)$$

V\u00e0y

$$\frac{ab}{cd} \geq \frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)} \geq 1$$

Do hàm số  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  \u0111\u00f2ng bi\u00ean tr\u00ean  $[1, +\infty)$  n\u00e9n ta c\u00f2i

$$f\left(\frac{ab}{cd}\right) \geq f\left(\frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}\right)$$

M\u00e0i kh\u00e1c, ta c\u00f2i

$$f\left(\frac{ab}{cd}\right) = \frac{a^2b^2 + c^2d^2}{abcd}$$

$$f\left(\frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}\right) = \frac{(2k-a)^2(2k-b)^2 + (2k-c)^2(2k-d)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

Do \u0111\u00f2i

$$\frac{2(a^2b^2 + c^2d^2)}{abcd} \geq \frac{2((2k-a)^2(2k-b)^2 + (2k-c)^2(2k-d)^2)}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

V\u00e0y (3) \u0111\u00f2ng.

T\u00f2\u0111n\u00e0y, ta suy ra \u0111i\u00eau ph\u00e1i ch\u00f2ng minh.

\u0111\u00e0ng th\u00f2c x\u00e1y ra khi v\u00e0 ch\u00e1 khi  $a = b = c = d$ .

### B\u00e0i to\u00e1n 68.

Cho  $x, y, z > 0$  th\u00f2a  $x + y + z = 1$ . Ch\u00f2ng minh r\u00e0ng

$$\sqrt{x^2 + xyz} + \sqrt{y^2 + xyz} + \sqrt{z^2 + xyz} \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 2\sqrt{3xyz}}$$

*L\u00f2i gi\u00e1i.*

Ta c\u00f2i b\u00e0i \u0111\u00e0ng th\u00f2c c\u00e0n ch\u00f2ng minh t\u00f2ng \u0111\u00f2ng v\u00f2i

$$\begin{aligned} & \left( \sqrt{x^2 + xyz} + \sqrt{y^2 + xyz} + \sqrt{z^2 + xyz} \right)^2 \geq x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 2\sqrt{3xyz} \\ & \Leftrightarrow 2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} + 2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)} + 2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} \geq \\ & \qquad \qquad \qquad \geq (xy + yz + zx - 3xyz) + 2\sqrt{3xyz} \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} &= 2\sqrt{xy(x(x+y+z) + yz)(y(x+y+z) + zx)} \\ &= 2(x+y)\sqrt{xy(z+x)(z+y)} \\ &= 2(x+y)\sqrt{x^2y^2 + xyz} \\ &\geq (x+y)\left(xy + \sqrt{3xyz}\right) \text{ (theo bđt Bunhiacopki)} \\ &= xy - xyz + (x+y)\sqrt{3xyz} \end{aligned}$$

Tổng lại, ta có:

$$\begin{aligned} 2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)} &\geq yz - xyz + (y+z)\sqrt{3xyz} \\ 2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} &\geq zx - xyz + (z+x)\sqrt{3xyz} \\ \Rightarrow 2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} + 2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)} + 2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} &\geq \\ &\geq (xy + yz + zx - 3xyz) + 2\sqrt{3xyz} \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{1}{3}$ .

### Bài toán 69. (USAMO 1999)

Cho các số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ( $n > 3$ ) thỏa  $\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n \\ a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq n^2 \end{cases}$ . Chứng minh rằng

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2.$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

Giả sử ngược lại  $a_i < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$ . Khi đó ta có

$$a_1 + a_2 + \dots + a_i - 2(i-1) < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$$

Do  $a_i < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$  nên

$$\begin{aligned}
(2-a_i)(2-a_j) &> 0 \\
\Rightarrow 4-2(a_i+a_j)+a_i a_j &> 0 \\
\Leftrightarrow 8-4(a_i+a_j)+2a_i a_j &> 0 \\
\Leftrightarrow (2^2-4(a_i+a_j)+(a_i+a_j)^2)+2^2 &> a_i^2+a_j^2 \\
\Leftrightarrow (a_i+a_j-2)^2+2^2 &> a_i^2+a_j^2
\end{aligned}$$

Do ñoù

$$\begin{aligned}
(a_1+a_2-2)^2+2^2 &> a_1^2+a_2^2 \\
(a_1+a_2+a_3-2\cdot 2)^2+2^2 &> a_3^2+(a_1+a_2-2)^2 \\
&\dots\dots \\
(a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1))^2+2^2 &> a_n^2+(a_1+a_2+\dots+a_{n-1}-2(n-2))^2
\end{aligned}$$

Cộng  $n-1$  bất ñáng thức trên lại veát theo veá ta ñöôc

$$(a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1))^2+4(n-1) > a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$$

Do  $a_i < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$  vaát  $a_1+a_2+\dots+a_n \geq n$  neán

$$2 > a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1) \geq 2-n$$

Do  $n \geq 4$  neán  $n-2 \geq 2$ . Do ñoù

$$\begin{aligned}
n-2 &> a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1) \geq 2-n \\
\Rightarrow (n-2)^2 &> (a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1))^2 \\
\Rightarrow (n-2)^2+4(n-1) &> (a_1+a_2+\dots+a_n-2(n-1))^2+4(n-1)
\end{aligned}$$

Do ñoù

$$n^2 = (n-2)^2+4(n-1) > a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2$$

Ñieu nay trai vöi giaáthieát  $a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2 \geq n^2$ .

Vaáy ta phải coi  $\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2$ .

\* **Cách 2.**

Giaısöüngöôc lại  $a_i < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$ .

Ñaát  $b_i = 2-a_i \quad (i = \overline{1, n})$ ,  $S = \sum_{i=1}^n b_i$  vaát  $T = \sum_{i=1}^n b_i^2$ . Theáthi, töngiaáthieát, ta coi

$$\begin{cases} (2-b_1) + (2-b_2) + \dots + (2-b_n) \geq n \\ (2-b_1)^2 + (2-b_2)^2 + \dots + (2-b_n)^2 \geq n^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S \leq n \\ T \geq n^2 - 4n + 4S \end{cases}$$

Tõõnãây, ta coi

$$\begin{aligned} T &\geq n^2 - 4n + 4S \\ &= (n-4)n + 4S \\ &\geq S(n-4) + 4S \quad (\text{do } n \geq 4) \\ &= nS \end{aligned} \tag{1}$$

Do  $a_i < 2 \quad \forall i = \overline{1, n}$  nên  $b_i > 0 \quad \forall i = \overline{1, n} \Rightarrow b_i < n \quad \forall i = \overline{1, n}$  (do  $S \leq n$ ). Do ñoù

$$T = \sum_{i=1}^n b_i^2 < \sum_{i=1}^n n b_i = nS \tag{2}$$

Tõõ(1) và(2), ta suy ra mâu thuẫn. Vậy ta phải coi

$$\max\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \geq 2 \quad (\text{npcm})$$

### Bài toán 70. (Toán Học Tuổi Trẻ 2006)

Cho các số thực  $a, b, c, a_1, b_1, c_1$  ( $aa_1 \neq 0$ ) thỏa

$$\left(\frac{c}{a} - \frac{c_1}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a} - \frac{b_1}{a_1}\right) \cdot \frac{bc_1 - b_1c}{aa_1} < 0$$

Chứng minh rằng hai phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  và  $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$  nếu coi hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số

*Lời giải.*

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét  $a = a_1 = 1$  là ñủ

Khi ñoù bài toán chuyển về

“Các số thực  $b, c, b_1, c_1$  thỏa  $(c - c_1)^2 + (b - b_1)(bc_1 - b_1c) < 0$ . Khi đó các phương trình  $f(x) = x^2 + bx + c = 0$  và  $g(x) = x^2 + b_1x + c_1 = 0$  nếu có hai nghiệm phân biệt và các nghiệm này nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số”

Để chứng minh hai phương trình này có hai nghiệm phân biệt, ta cần phải chứng

$$\text{minh } \begin{cases} \Delta_f = b^2 - 4c > 0 \\ \Delta_g = b_1^2 - 4c_1 > 0 \end{cases}$$

Trước hết, ta chứng minh  $(b^2 - 4c)(b_1^2 - 4c_1) > 0$

Gia sử ngược lại  $(b^2 - 4c)(b_1^2 - 4c_1) \leq 0 \Rightarrow b^2c_1 + b_1^2c - 2cc_1 \geq \frac{b^2b_1^2}{4} + 2cc_1$ . Do đó

$$\begin{aligned} (c - c_1)^2 + (b - b_1)(bc_1 - b_1c) &= (b^2c_1 + b_1^2c - 2cc_1) + c^2 + c_1^2 - bb_1(c + c_1) \\ &\geq \frac{b^2b_1^2}{4} + 2cc_1 + c^2 + c_1^2 - bb_1(c + c_1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot (bb_1 - 2(c + c_1))^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Như vậy trái với giả thiết.

Vậy ta phải có  $(b^2 - 4c)(b_1^2 - 4c_1) > 0$  (\*)

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh  $\begin{cases} b^2 - 4c > 0 \\ b_1^2 - 4c_1 > 0 \end{cases}$ . Giả sử ngược lại này không đúng. Khi đó

từ (\*), ta có  $\begin{cases} b^2 - 4c < 0 \\ b_1^2 - 4c_1 < 0 \end{cases}$ . Do đó

$$\begin{aligned} (c - c_1)^2 + (b - b_1)(bc_1 - b_1c) &= (c - c_1)^2 + b^2c_1 + b_1^2c - bb_1(c + c_1) \\ &\geq (c - c_1)^2 + 2bb_1\sqrt{cc_1} - bb_1(c + c_1) \\ &= (c - c_1)^2 - bb_1(\sqrt{c} - \sqrt{c_1})^2 \\ &= (\sqrt{c} - \sqrt{c_1})^2 \left( (\sqrt{c} + \sqrt{c_1})^2 - bb_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq (\sqrt{c} - \sqrt{c_1})^2 (4\sqrt{cc_1} - bb_1) \\
&\geq (\sqrt{c} - \sqrt{c_1})^2 \left( 4\sqrt{\frac{b^2}{4} \cdot \frac{b_1^2}{4}} - bb_1 \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Nếu này trái với giả thiết.

Vậy ta phải có  $\begin{cases} b^2 - 4c > 0 \\ b_1^2 - 4c_1 > 0 \end{cases}$ .

Từ đó ta có các phương trình  $f(x) = x^2 + bx + c = 0$  và  $g(x) = x^2 + b_1x + c_1 = 0$  nếu có hai nghiệm phân biệt.

Gọi  $x_1, x_2$  là các nghiệm của phương trình  $f(x) = x^2 + bx + c = 0$  thì theo định lý Viet, ta có  $x_1 + x_2 = -b$  và  $x_1x_2 = c$ . Nếu chứng minh  $f(x)$  và  $g(x)$  có các nghiệm nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số ta chưa cần chứng minh

$$g(x_1).g(x_2) < 0$$

Ta có

$$\begin{cases} x_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ x_2^2 + bx_2 + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 = -bx_1 - c \\ x_2^2 = -bx_2 - c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1) = (b_1 - b)x_1 + c_1 - c \\ g(x_2) = (b_1 - b)x_2 + c_1 - c \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{aligned}
g(x_1).g(x_2) &= ((b_1 - b)x_1 + c_1 - c)((b_1 - b)x_2 + c_1 - c) \\
&= (c_1 - c)^2 + (c_1 - c)(b_1 - b)(x_1 + x_2) + (b_1 - b)^2 x_1x_2 \\
&= (c_1 - c)^2 - b(c_1 - c)(b_1 - b) + c(b_1 - b)^2 \\
&= (c_1 - c)^2 + (b_1 - b)(c(b_1 - b) - b(c_1 - c)) \\
&= (c_1 - c)^2 + (b - b_1)(bc_1 - b_1c) < 0 \quad (\text{theo gt})
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x_1).g(x_2) < 0$$

Vậy  $f(x)$  và  $g(x)$  có các nghiệm nằm xen kẽ nhau khi biểu diễn trên trục số

Từ các chứng minh trên, ta suy ra đpcm.



### Bài 71.

Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa  $21ab + 2bc + 8ca \leq 12$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c}$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Đặt  $x = \frac{1}{a}, y = \frac{2}{b}, z = \frac{3}{c}$ , bài toán chuyển về

$x, y, z > 0$  thỏa  $2x + 4y + 7z \leq 2xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x + y + z$$

Không mất tính tổng quát, ta chỉ cần xét trường hợp  $2x + 4y + 7z = 2xyz$  là đúng (tại

sao?). Đặt  $x = \sqrt{7}m, y = \frac{\sqrt{7}}{2}n, z = \frac{2\sqrt{7}}{7}p$  thì ta có  $m + n + p = mnp$ . Do nội tâm

tại tam giác nhọn  $ABC$  sao cho  $m = \operatorname{tg}A, n = \operatorname{tg}B, p = \operatorname{tg}C$ . Khi đó ta có

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot (14\operatorname{tg}A + 7\operatorname{tg}B + 4\operatorname{tg}C)$$

Xét hàm số  $f(x) = \operatorname{tg}x$  với  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Ta có

$$f'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 1$$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}^2 x + 1) > 0$$

$\Rightarrow f(x)$  là hàm lồi trên  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

Do đó theo tính chất hàm lồi, ta có

$$f(A) \geq f\left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right) \left(A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7} \cdot \left( A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 14f(A) \geq 6\sqrt{7} + 32 \left( A - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

Töông töi, ta coi

$$f(B) \geq f \left( \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right) + f' \left( \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right) \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7} \cdot \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 7f(B) \geq 5\sqrt{7} + 32 \left( B - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$f(C) \geq f \left( \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) + f' \left( \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

$$= \sqrt{7} + 8 \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

$$\Rightarrow 4f(C) \geq 4\sqrt{7} + 32 \left( C - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right)$$

Do ñoi

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot (14f(A) + 7f(B) + 4f(C))$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14} \cdot \left( 15\sqrt{7} + 32 \left( A + B + C - \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} - \operatorname{arctg} \sqrt{7} \right) \right)$$

$$= \frac{15}{2} \quad (\text{vì } A + B + C = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} + \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} + \operatorname{arctg} \sqrt{7} = \pi)$$

Nhàng thöïc xãy ra khi vaø chæ khi

$$\begin{cases} A = \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{7}}{7} \\ B = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \\ C = \operatorname{arctg} \sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = \frac{5}{2} \\ p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Vây

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

+ Cách 2.

Đặt  $a = \frac{1}{3x}, b = \frac{4}{5y}, c = \frac{3}{2z}$ , bài toán chuyển về

“ $x, y, z > 0$  và  $3x + 5y + 7z \leq 15xyz$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6x + 5y + 4z).”$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$15xyz \geq 3x + 5y + 7z \geq 15 \sqrt[15]{x^3 y^5 z^7}$$

$$\Rightarrow \sqrt[15]{x^{12} y^{10} z^8} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[15]{x^6 y^5 z^4} \geq 1$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$P = \frac{1}{2} \cdot (6x + 5y + 4z) \geq \frac{15}{2} \cdot \sqrt[15]{x^6 y^5 z^4} \geq \frac{15}{2}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ 15xyz = 3x + 5y + 7z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$$

Kết luận

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

## Bài toán 72.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh rằng

$$\sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{a}{b+c}} \geq 2 \sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}} + 1$$

### Lời giải.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \sqrt{a(a+b)(a+c)} &\geq 2 \sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} a(a+b)(a+c) + 2 \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{ab(a+c)(b+c)} &\geq 4(a+b+c)(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 2 \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{ab(a+c)(b+c)} &\geq 3 \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có  $(a+c)(b+c) \geq (\sqrt{ab} + c)^2$

Do nội nội chứng minh bất đẳng thức này cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 2 \sum_{\text{cyc}} (a+b) (c + \sqrt{ab}) \sqrt{ab} &\geq 3 \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 2\sqrt{abc} \cdot \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{c} &\geq \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2\sqrt{abc} \cdot \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{c} \geq 12abc$$

Do nội theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 + c^3 + 2\sqrt{abc} \cdot \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{c} &\geq a^3 + b^3 + c^3 + 12abc \\ &= (a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) + 9abc \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \\ \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 2\sqrt{abc} \cdot \sum_{\text{cyc}} (a+b) \sqrt{c} &\geq \sum_{\text{cyc}} ab(a+b) + 9abc \\ \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = b, c \rightarrow 0$  và các hoán vị.

Bài toán 73. (Phạm Kim Hưng)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Chứng minh rằng

$$ab + bc + ca \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^2 + b^2 + c^2 + 16abc)$$

Lời giải.

$$\text{Đặt } q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow \begin{cases} q, r \geq 0 \\ q \leq \frac{1}{3} \end{cases} \text{ thế thì theo bất đẳng thức Schur, ta có}$$

$$r \geq \frac{4q-1}{9}. \text{ Từ cách đặt, ta có}$$

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = q^2 - 2r$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2q$$

Do nội bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$q \geq 8(q^2 - 2r)(16r + 1 - 2q)$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 8(2r - q^2)(16r + 1 - 2q) + q \geq 0$$

$$\text{Ta có } f'(r) = 6(32r - (4q - 1)(2q + 1))$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $1 \geq 4q \Rightarrow f'(r) \geq 0 \Rightarrow f(r)$  là hàm đồng biến  $\forall r \geq 0$ .

\* Trường hợp 2.  $4q \geq 1 \Rightarrow r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ . Do nội

$$\begin{aligned} f'(r) &= 6(32r - (4q - 1)(2q + 1)) \geq 6\left(\frac{32(4q-1)}{9} - (4q-1)(2q+1)\right) \\ &= \frac{2(4q-1)(23-18q)}{3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(r) \text{ là hàm đồng biến } \forall r \geq 0.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có  $f(r)$  là hàm đồng biến  $\forall r \geq 0$ . Do nội

$$f(r) \geq f(0) = q(4q-1)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

\* Nhận xét.

Có thể dễ dàng chứng minh nổi 16 hàng số tốt nhất cho bất đẳng thức

$$ab + bc + ca \geq 8(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^2 + b^2 + c^2 + kabc)$$

Bài toán 74. (Voi Quốc Bài Cẩn)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{c^3+1} + \frac{b}{a^3+1} + \frac{c}{b^3+1} \geq \frac{3}{2}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{cyc} a(a^3+1)(b^3+1) \geq 3(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1) \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{cyc} a^4b^3 + 2 \sum_{cyc} a^4 + 2 \sum_{cyc} ab^3 + 2 \sum_{cyc} a \geq 3 \sum_{cyc} a^3b^3 + 3 \sum_{cyc} a^3 + 6 \\ \Leftrightarrow & \left( 2 \sum_{cyc} a^4b^3 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sum_{cyc} a^3b^3 \right) + \left( 2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sum_{cyc} a^3 \right) + 2 \left( \sum_{cyc} a - 3 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{cyc} ab^3(a-1)^2(2a+1) + \left( 2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sum_{cyc} a^3 \right) + 2 \left( \sum_{cyc} a - 3 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức này cho, ta cần chứng minh

$$2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sum_{cyc} a^3 \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_{cyc} a \geq 3 \quad (2)$$

\* Chứng minh (1).

Ta có

$$\begin{aligned} 2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sum_{cyc} a^3 &= 2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - 3 \sqrt[3]{abc} \cdot \sum_{cyc} a^3 \\ &\geq 2 \sum_{cyc} a^4 + \sum_{cyc} ab^3 - (a+b+c) \cdot \sum_{cyc} a^3 \quad (\text{theo AM-GM}) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sum_{cyc} (3a^4 + b^4 - 3a^3b) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \sum_{cyc} (a-b)^2 (3a^2 + 2ab + b^2) \\ \geq 0$$

⇒ (1) ñúng.

\* Chöng minh (2).

Ta coi

$$\sum_{cyc} a - 3 = \sum_{cyc} a - 3\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}) \cdot \sum_{cyc} (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b})^2 \geq 0$$

⇒ (2) ñúng.

Töø(1) vaø(2), ta suy ra ñpcm.

Ñáng thìc xảy ra khi vaøchæ khi  $a = b = c = 1$ .

**Bài toán 75. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c > 0$  thoã  $a + b + c = 3$ . Chöng minh rằng

$$\frac{1}{2ab^2 + 1} + \frac{1}{2bc^2 + 1} + \frac{1}{2ca^2 + 1} \geq 1$$

*Lời giải.*

Ta coi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2ab^2 + 1} + \frac{1}{2bc^2 + 1} + \frac{1}{2ca^2 + 1} = \\ & = \left( \frac{1}{2ab^2 + 1} - 1 \right) + \left( \frac{1}{2bc^2 + 1} - 1 \right) + \left( \frac{1}{2ca^2 + 1} - 1 \right) + 3 \\ & = 3 - 2 \cdot \sum_{cyc} \frac{ab^2}{2ab^2 + 1} \\ & \geq 3 - 2 \cdot \sum_{cyc} \frac{ab^2}{3\sqrt[3]{a^2b^4}} \quad (\text{theo bñt AM-GM}) \\ & = 3 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{cyc} \sqrt[3]{ab^2} \\ & \geq 3 - \frac{2}{3} \cdot \sum_{cyc} \frac{a + 2b}{3} \quad (\text{theo bñt AM-GM}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3 - \frac{2}{3} \sum_{cyc} a \\
&= 3 - \frac{2}{3} \cdot 3 \\
&= 1 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \geq 1 \text{ (ñpcm)}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Bài toán 76. (Vasile Cirtoaje)

Cho  $a, b, c \geq 0$ . Chứng minh rằng

$$(a^2 - bc)\sqrt{b+c} + (b^2 - ca)\sqrt{c+a} + (c^2 - ab)\sqrt{a+b} \geq 0$$

*Lời giải.*

Ta combat đẳng thức cần chứng minh tổng không với

$$\begin{aligned}
&\sum_{cyc} (2a^2 - 2bc)\sqrt{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} ((a+c)(a-b) - (a+b)(c-a))\sqrt{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a+c)(a-b)\sqrt{b+c} - \sum_{cyc} (a+b)(c-a)\sqrt{b+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a+c)(a-b)\sqrt{b+c} - \sum_{cyc} (b+c)(a-b)\sqrt{a+c} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)\sqrt{(a+c)(b+c)} \cdot (\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2 \sqrt{(a+c)(b+c)}}{\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}} \geq 0 \text{ (đúng)} \\
&\Rightarrow \text{ñpcm.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .



### Bài toán 77.

Cho  $a, b, c > 0$  và  $k$  là hằng số dương cho trước. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a, b, c) = \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

#### Lời giải.

Đặt  $x = a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + c^2b + b^2a, y = 6abc$ . Khi đó ta có

$$f(a, b, c) = \frac{6x}{y} + \frac{ky}{6x+2y} = 6t + \frac{k}{6t+2}$$

trong đó  $t = \frac{x}{y} \geq 1$ .

Đặt  $g(t) = 6t + \frac{k}{6t+2}$  với  $t \geq 1$ , ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của  $g(t)$ .

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $k \leq 64$ . Khi đó ta có

$$g(t) - 6 - \frac{k}{8} = \frac{3(t-1)(48t-k+16)}{8(3t+1)} \geq 0$$

$$\Rightarrow g(t) \geq 6 + \frac{k}{8}$$

$$\Rightarrow f(a, b, c) \geq 6 + \frac{k}{8}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $t=1 \Leftrightarrow a=b=c$ .

Vậy trong trường hợp này, ta có

$$\min f(a, b, c) = 6 + \frac{k}{8}$$

\* Trường hợp 2.  $k \geq 64$ . Khi đó ta có

$$g'(t) = \frac{6(6t+2-\sqrt{k})(6t+2+\sqrt{k})}{(6t+2)^2}$$

$$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = t_0 = \frac{\sqrt{k} - 2}{6}$$

Qua  $t_0$  thì  $g'(t)$  luôn dương tăng dần sang dương nên ta có

$$\begin{aligned} g(t) &\geq g(t_0) = 2\sqrt{k} - 2 \quad \forall t \geq 1 \\ \Rightarrow f(a, b, c) &\geq 2\sqrt{k} - 2 \end{aligned}$$

Ước thời xảy ra khi và chỉ khi

$$t = \frac{\sqrt{k} - 2}{6} \Leftrightarrow a^2b + b^2c + c^2a + a^2c + c^2b + b^2a = (\sqrt{k} - 2)abc \quad (*)$$

Ta cần chứng minh rằng tồn tại bộ số dương  $(a, b, c)$  thỏa mãn hệ thức (\*) là bài toán nội dung giải quyết hoàn toàn.

Thật vậy, cho  $b = c = 1$  thì hệ thức (\*) trở thành

$$f(a) = a^2 - \left( \frac{\sqrt{k}}{2} - 2 \right) a + 1 = 0$$

Ta có  $\lim_{a \rightarrow 0^+} f(a) = 1 > 0$ ,  $f(1) = 4 - \frac{\sqrt{k}}{2} \leq 4 - \frac{\sqrt{64}}{2} = 0$ . Do nội tồn tại  $a \in (0, 1]$  sao

cho  $f(a) = 0$ . Vậy tồn tại bộ số  $(a, b, c)$  thỏa mãn hệ thức (\*).

Do nội trong trường hợp này, ta có

$$\min f(a, b, c) = 2\sqrt{k} - 2$$

Kết luận

- + Nếu  $k \leq 64$  thì  $\min f(a, b, c) = 6 + \frac{k}{8}$
- + Nếu  $k \geq 64$  thì  $\min f(a, b, c) = 2\sqrt{k} - 2$

Bài toán 78. (Voi Quốc Bài Cẩn)

Cho  $a, b, c > 0$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{8a^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{8b^3+1}} \geq 1$$

*Lời giải.*

Ta coi nhân xét sau

$$\frac{1}{\sqrt{8x^3+1}} \geq \frac{1}{2x^2+1} \quad \forall x > 0 \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow 2x^2+1 \geq \sqrt{8x^3+1} \\ &\Leftrightarrow (2x^2+1)^2 \geq 8x^3+1 \\ &\Leftrightarrow 4x^2(x-1)^2 \geq 0 \quad (\text{hàng}) \end{aligned}$$

Vậy (\*) hàng.

Do ão

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}} + \frac{b}{\sqrt{8a^3+1}} + \frac{c}{\sqrt{8b^3+1}} \geq \frac{a}{2c^2+1} + \frac{b}{2a^2+1} + \frac{c}{2b^2+1}$$

Nhõ vậy, ãe chứng minh bất ãng thức ãa cho, ta chæ cần chứng minh

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2c^2+1} + \frac{b}{2a^2+1} + \frac{c}{2b^2+1} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(2a^2+1)(2b^2+1) \geq (2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1) \\ &\Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} a^3b^2 + 2 \sum_{cyc} a^3 + 2 \sum_{cyc} ab^2 + \sum_{cyc} a \geq 9 + 2 \sum_{cyc} a^2 + 4 \sum_{cyc} a^2b^2 \\ &\Leftrightarrow 2 \left( \sum_{cyc} a^3b^2 + \sum_{cyc} ab^2 - 2 \sum_{cyc} a^2b^2 \right) + 2 \left( \sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 \right) + 2 \sum_{cyc} a^3b^2 + \sum_{cyc} a \geq 9 \\ &\Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} ab^2(a-1)^2 + 2 \left( \sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 \right) + 2 \sum_{cyc} a^3b^2 + \sum_{cyc} a \geq 9 \quad (**) \end{aligned}$$

Lại coi theo bất ãng thức AM-GM thì

$$2 \sum_{cyc} a^3 b^2 + \sum_{cyc} a \geq 6 \sqrt[3]{a^5 b^5 c^5} + 3 \sqrt[3]{abc} = 9$$

Do nội nội chứng minh bất đẳng thức (\*\*), ta cần chứng minh

$$\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 \geq 0 \quad (***)$$

Những điều này hiển nhiên vì

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 &= \frac{1}{3} \left( 3 \sum_{cyc} a^3 - 3 \sqrt[3]{abc} \cdot \sum_{cyc} a^2 \right) \\ &\geq \frac{1}{3} \left( 3 \sum_{cyc} a^3 - \left( \sum_{cyc} a \right) \cdot \sum_{cyc} a^2 \right) \quad (\text{theo bđt AM-GM}) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{cyc} (a-b)^2 (a+b) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Vậy (\*\*\*) đúng.

Tõõ này, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

\* Ghi chú

Ngoài ra, ta còn có một cách khác để chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{2c^2 + 1} + \frac{b}{2a^2 + 1} + \frac{c}{2b^2 + 1} \geq 1$$

Cụ thể như sau

Do  $a, b, c > 0, abc = 1$  nên tồn tại các số thực dương  $x, y, z$  sao cho  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$ ,

$c = \frac{z}{x}$ . Khi đó bất đẳng thức trên trở thành

$$\frac{x^3}{y(2z^2 + x^2)} + \frac{y^3}{z(2x^2 + y^2)} + \frac{z^3}{x(2y^2 + z^2)} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\frac{x^3}{y(2z^2+x^2)} + \frac{y^3}{z(2x^2+y^2)} + \frac{z^3}{x(2y^2+z^2)} = \frac{x^4}{xy(2z^2+x^2)} + \frac{y^4}{yz(2x^2+y^2)} + \frac{z^4}{zx(2y^2+z^2)}$$

$$\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)}$$

Do ñoø ñeächöng minh baø ñaøng thöïc ñaøcho, ta chæ caø chöng minh

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left( \sum_{cyc} x^4 - \sum_{cyc} x^3y \right) + 2 \left( \sum_{cyc} x^2y^2 - \sum_{cyc} x^2yz \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \sum_{cyc} (x-y)^2(3x^2+2xy+y^2) + \sum_{cyc} z^2(x-y)^2 \geq 0 \quad (\text{ñuøng})$$

$$\Rightarrow \text{ñpcm.}$$

### Baø toaøn 79. (Ñinh Ngoøc An)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thoøa  $a+b+c = ab+bc+ca$ . Tìm giaøtrö nhỏnhat vaø giaøtrö lớn nhata của bieäu thöïc

$$S = \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}$$

*Löøi giaøi.*

Ta seø chöng minh rằng  $\max S = \frac{3}{2}$  vaø không cóø min  $S$ .

Thaø vaaø, töø giaøthieøt, ta cóø

$$S = \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \cdot \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right) = 1 + \frac{1}{a+b+c} \cdot \left( \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right)$$

Do ñoø  $S > 1$ .

Cho  $c = 0, b = \frac{a}{a-1}$  ( $a > 1$ ) thì ta cũng cóø  $a+b+c = ab+bc+ca$ . Khi ñoø ta cóø

$$S = 1 + \frac{a-1}{a}$$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 1^+} S = 1.$$

Vậy không tồn tại min  $S$ .

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{a+b+c} \left( \frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \right) \\ &\leq 1 + \frac{1}{a+b+c} \left( \frac{\frac{1}{4} \cdot (a+b)^2}{a+b} + \frac{\frac{1}{4} \cdot (b+c)^2}{b+c} + \frac{\frac{1}{4} \cdot (c+a)^2}{c+a} \right) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi  $a = b = c = 1$ .

Vậy  $\max S = \frac{3}{2}$ .

### Bài toán 80. (Nguyễn Ngọc An)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $ab + bc + cd + da = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2abcd$$

*Lời giải.*

Ta có

$$ab + bc + cd + da = 1 \Leftrightarrow (a+c)(b+d) = 1$$

Nếu  $ac \geq 1$  thì dễ thấy  $f(a, b, c, d) \geq 2$ .

Nếu  $ac \leq 1$ . Khi này ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) - f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) &= \frac{(b-d)^2(1-ac)}{2} \geq 0 \\ \Rightarrow f(a, b, c, d) &\geq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \end{aligned}$$

Bây giờ nếu  $\frac{(b+d)^2}{4} \geq 1$  thì dễ thấy  $f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \geq 2$ .

Do này  $f(a, b, c, d) \geq 2$ . Nếu  $\frac{(b+d)^2}{4} \leq 1$  thì bằng lập luận tương tự như trên, ta có

$$f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \geq f\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$$

Do ñoài

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\geq f\left(a, \frac{b+d}{2}, c, \frac{b+d}{2}\right) \\ &\geq f\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right) \\ &= \frac{(a+c)^2}{2} + \frac{(b+d)^2}{2} + \frac{(a+c)^2(b+d)^2}{8} \\ &\geq 1 + \frac{1}{8} \\ &= \frac{9}{8} \end{aligned}$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có  $f(a, b, c, d) \geq \frac{9}{8}$ .

Giá trị nhỏ nhất xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = d = \frac{1}{2}$ .

Vậy  $\min f(a, b, c, d) = \frac{9}{8}$ .

### Bài toán 81. (Nguyễn Ngọc An)

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $ab + bc + cd + da + ac + bd = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(a, b, c, d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2abcd$$

**Lời giải.**

Xét số thức không âm  $y$  thỏa mãn

$$y^2 + ab + 2y(a+b) = 1 \Leftrightarrow (a+b)(c+d-2y) = y^2 - cd \quad (*)$$

(chú ý rằng  $y$  luôn luôn tồn tại)

Khi ñó, ta phải có  $y \leq \frac{c+d}{2}$ . Thật vậy, giả sử ngược lại  $y > \frac{c+d}{2}$ . Khi ñó, ta có

$$\begin{aligned}
y^2 + ab + 2y(a+b) &> \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + ab + (a+b)(c+d) \\
&\geq cd + ab + (a+b)(c+d) \\
&= ab + bc + cd + da + ac + bd \\
&= 1
\end{aligned}$$

Như vậy mai thuận vì  $y^2 + ab + 2y(a+b) = 1$ .

Vậy, ta phải coi  $y \leq \frac{c+d}{2}$ . Do ñoij tõi (\*), ta suy ra ñoõic  $y^2 \geq cd$ . Khi ñoij ta coi

$$\begin{aligned}
f(a,b,c,d) - f(a,b,y,y) &= (c-d)^2 + 2(1-ab)(y^2 - cd) \geq 0 \\
\Rightarrow f(a,b,c,d) &\geq f(a,b,y,y)
\end{aligned}$$

Bang lap luain tõiing tõi, ta ñain ñein

$$f(a,b,c,d) \geq f(x,x,y,y) = 2(x^2 + y^2 + x^2y^2)$$

Võij  $x, y \geq 0$  thoia main  $x^2 + y^2 + 4xy = 1$ .

Nein

$$f(a,b,c,d) \geq f(x,x,y,y) = 2(x^2 + y^2 + x^2y^2) \geq \frac{13}{18}$$

Ñaing thoic xay ra khi vaõchæ khi  $a = b = c = d = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

$$\text{Vậy } \min f(a,b,c,d) = \frac{13}{18}.$$

### Bai toain 82.

Cho  $x, y, z > 0$  thoia  $xy + yz + zx + xyz = 4$ . Tim hang soa  $k$  toa nhata cho bat ñaing thoic

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3k \geq (k+1)(x+y+z)$$

### Lõij giai.

Cho  $x = y = \sqrt{2}, z = \sqrt{2} - 1$ , ta suy ra ñoõic  $k \leq 2\sqrt{2} + 1$ . Ta se õhõing minh ñay laõ giaõtrõ can tim, tõi laõ õhõing minh



$$x^2 + y^2 + z^2 + 3(2\sqrt{2} + 1) \geq 2(\sqrt{2} + 1)(x + y + z) \quad (*)$$

Tổng giá trị của  $xy + yz + zx + xyz = 4$ , ta suy ra ñiều

$$\frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} + \frac{1}{z+2} = 1$$

$$\text{Do ñiều ta coi thể ñặt } m = \frac{1}{x+2}, n = \frac{1}{y+2}, p = \frac{1}{z+2} \Rightarrow \begin{cases} m+n+p=1 \\ 0 < m, n, p < \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow m, n, p \text{ là}$$

ñó ñ dài ba cạnh của một tam giác. Do ñiều tồn tại các số thực dương  $a, b, c$  sao cho  $m = b + c, n = c + a, p = a + b$ . Khi ñiều tồn tại ñất, ta coi

$$\begin{aligned} x &= \frac{1-2m}{m} = \frac{n+p-m}{m} = \frac{2a}{b+c} \\ y &= \frac{1-2n}{n} = \frac{p+m-n}{n} = \frac{2b}{c+a} \\ z &= \frac{1-2p}{p} = \frac{m+n-p}{p} = \frac{2c}{a+b} \end{aligned}$$

Bất ñẳng thức (\*) trở thành

$$\begin{aligned} &\sum_{\text{cyc}} \frac{4a^2}{(b+c)^2} + 3(2\sqrt{2} + 1) \geq 2(\sqrt{2} + 1) \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{2a}{b+c} \\ \Leftrightarrow &\sum_{\text{cyc}} \left( \frac{4a^2}{(b+c)^2} - \frac{4(\sqrt{2} + 1)a}{b+c} + (2\sqrt{2} + 1) \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{\text{cyc}} \frac{4a^2 - 4(\sqrt{2} + 1)a(b+c) + (2\sqrt{2} + 1)(b+c)^2}{(b+c)^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow &\sum_{\text{cyc}} \frac{(2a - (2\sqrt{2} + 1)b - (2\sqrt{2} + 1)c)(a-b)}{(b+c)^2} - \\ &\quad - \sum_{\text{cyc}} \frac{(2a - (2\sqrt{2} + 1)b - (2\sqrt{2} + 1)c)(c-a)}{(b+c)^2} \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{(2a - (2\sqrt{2} + 1)b - (2\sqrt{2} + 1)c)(a - b)}{(b + c)^2} -$$

$$- \sum_{\text{cyc}} \frac{(2b - (2\sqrt{2} + 1)c - (2\sqrt{2} + 1)a)(a - b)}{(a + c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} (a^2 - b^2)^2 (2a^2 + 2b^2 + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + (1 - 2\sqrt{2})ab + (3 - 2\sqrt{2})c(a + b)) \geq 0$$

Nhất

$$S_{a^2} = 2b^2 + 2c^2 + (1 - 2\sqrt{2})a^2 + (1 - 2\sqrt{2})bc + (3 - 2\sqrt{2})a(b + c)$$

$$S_{b^2} = 2c^2 + 2a^2 + (1 - 2\sqrt{2})b^2 + (1 - 2\sqrt{2})ca + (3 - 2\sqrt{2})b(c + a)$$

$$S_{c^2} = 2a^2 + 2b^2 + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + (1 - 2\sqrt{2})ab + (3 - 2\sqrt{2})c(a + b)$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$S_{a^2}(b^2 - c^2)^2 + S_{b^2}(c^2 - a^2)^2 + S_{c^2}(a^2 - b^2)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta coi hệ giá trị số  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi đó ta có

$$S_{b^2} = 2c^2 + 2a^2 + (1 - 2\sqrt{2})b^2 + (1 - 2\sqrt{2})ca + (3 - 2\sqrt{2})b(c + a)$$

$$\geq 2c^2 + 2b^2 + (1 - 2\sqrt{2})b^2 + (1 - 2\sqrt{2})cb + (3 - 2\sqrt{2})b(c + b)$$

$$= 2(\sqrt{2} - 1)^2 b^2 - 4(\sqrt{2} - 1)bc + 2c^2$$

$$= 2((\sqrt{2} - 1)b - c)^2 \geq 0$$

$$S_{c^2} = 2a^2 + 2b^2 + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + (1 - 2\sqrt{2})ab + (3 - 2\sqrt{2})c(a + b)$$

$$\geq 4ab + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + (1 - 2\sqrt{2})ab + (3 - 2\sqrt{2})c(a + b)$$

$$= (5 - 2\sqrt{2})ab + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + (3 - 2\sqrt{2})c(a + b)$$

$$\geq (5 - 2\sqrt{2})c^2 + (1 - 2\sqrt{2})c^2 + 2(3 - 2\sqrt{2})c^2$$

$$= (6 - 4\sqrt{2})c^2 + 2(3 - 2\sqrt{2})c^2$$

$$= 4(\sqrt{2} - 1)^2 c^2$$

$$\geq 0$$

$$\begin{aligned}
S_{a^2} + S_{b^2} &= (\sqrt{2} - 1)^2 (a^2 + b^2) + 2(\sqrt{2} - 1)ab - 4(\sqrt{2} - 1)c(a + b) + 4c^2 \\
&= (\sqrt{2} - 1)^2 (a + b)^2 - 4(\sqrt{2} - 1)c(a + b) + 4c^2 \\
&= \left( (\sqrt{2} - 1)(a + b) - 2c \right)^2 \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Do ñoài

$$\begin{aligned}
S_{a^2}(b^2 - c^2)^2 + S_{b^2}(c^2 - a^2)^2 + S_{c^2}(a^2 - b^2)^2 &\geq (S_{a^2} + S_{b^2})(b^2 - c^2)^2 \geq 0 \\
\Rightarrow (*) \text{ ñuõng.}
\end{aligned}$$

Vaây  $k_{\max} = 2\sqrt{2} + 1$ .

### Baì toaøn 83. (Voài Quoc Baì Cai)

Cho tam giaïc  $ABC$ . Chõng minh raõng

$$\frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{B}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{B}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{B}{2}\right)} + \frac{\left(1 - \sin \frac{C}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{C}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{C}{2}\right)} \geq 2 + \sqrt{3}$$

*Lõu giaì.*

Ap dụng baì ñaõng thõic Bunhiacopxki, ta coài

$$\sum_{cyc} \frac{\left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)}{\sin \frac{A}{2} \cdot \left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)} \geq \frac{\left(\sum_{cyc} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\right)^2}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right)\left(1 + \cos \frac{A}{2}\right)\left(1 + \sin \frac{A}{2}\right)}$$

Ap dụng baì ñaõng thõic AM-GM, ta coài

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \leq \left(\frac{\sin \frac{A}{2} + 1 - \sin \frac{A}{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Tõõng tõì, ta coài

$$\sin \frac{B}{2} \left( 1 - \sin \frac{B}{2} \right) \leq \frac{1}{4}$$

$$\sin \frac{C}{2} \left( 1 - \sin \frac{C}{2} \right) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \cdot \sum_{cyc} \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left( 3 + \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_{cyc} \sin A \right)$$

Chú ý rằng  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$ ,  $\sum_{cyc} \cos \frac{A}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sum_{cyc} \sin A \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right) \leq \frac{1}{4} \cdot \left( 3 + \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{9(2 + \sqrt{3})}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right)} \geq \frac{16}{9(2 + \sqrt{3})}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{\left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right)} \geq \frac{16 \left( \sum_{cyc} \left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \right)^2}{9(2 + \sqrt{3})}$$

Do nội ñe chöng minh bất ñaäng thời ña cho, ta chæ cần chöng minh

$$\frac{16 \left( \sum_{cyc} \left( 1 - \sin \frac{A}{2} \right) \left( 1 + \cos \frac{A}{2} \right) \right)^2}{9(2 + \sqrt{3})} \geq 2 + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left(1 - \sin \frac{A}{2}\right) \left(1 + \cos \frac{A}{2}\right) \geq \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \left(\cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A\right) \geq -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Do  $\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2}$  nên

$$-\sum_{cyc} \sin \frac{A}{2} + \sum_{cyc} \left(\cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A\right) \geq -\frac{3}{2} + \sum_{cyc} \left(\cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A\right)$$

Do ñoij ta chàcàn chõng minh

$$\sum_{cyc} \left(\cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A\right) \geq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Xét hàm số  $f(x) = \cos x - \frac{1}{2} \cdot \sin 2x + x - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$  với  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có  $f'(x) = -\sin x + 1 - \cos 2x = \sin x \cdot (2\sin x - 1)$ ,  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} = x_0$

Qua  $x_0$  thì  $f'(x)$  ñoái dấu tõm sang ðõng nên

$$f(x) \geq f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \quad \forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Do  $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  nên

$$f\left(\frac{A}{2}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A + \frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A \geq \left(\frac{\pi}{6} - \frac{A}{2}\right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Tõng tõ, ta cói

$$\cos \frac{B}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin B \geq \left( \frac{\pi}{6} - \frac{B}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos \frac{C}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin C \geq \left( \frac{\pi}{6} - \frac{C}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Do ñoù

$$\sum_{cyc} \left( \cos \frac{A}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sin A \right) \geq \sum_{cyc} \left( \left( \frac{\pi}{6} - \frac{A}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow$  ñpcm.

Ñaúng thòic xaáy ra khi vaøchaè khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ .

#### Baøi toán 84.

Cho  $a, b, c > 0$  thoà  $a + b + c = 1$ . Chòing minh rằng

$$\left( \frac{1}{a} - 2 \right)^2 + \left( \frac{1}{b} - 2 \right)^2 + \left( \frac{1}{c} - 2 \right)^2 \geq \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

*Lòii giaøi.*

Ñaát  $x = a^2 + b^2 + c^2$ . Khi ñoù deãthaáy  $\frac{1}{3} \leq x < 1$ . Do ñoù

$$(x-1)(3x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 4x-1 \geq 3x^2$$

Ta laøi coøi

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c) = abc$$

Do ñoù

$$(4x-1)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 3abcx^2$$

Maát khai, ta laøi coøi

$$4x-1 = (b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2$$

Aøp duøng baøt ñaúng thòic Chebyshev, ta coøi

$$3((b+c-a)^2b^2c^2 + (c+a-b)^2c^2a^2 + (a+b-c)^2a^2b^2) \geq$$

$$\geq ((b+c-a)^2 + (c+a-b)^2 + (a+b-c)^2)(b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2)$$

Do ñoij ta coi

$$\begin{aligned} & ((b+c-a)^2b^2c^2 + (c+a-b)^2c^2a^2 + (a+b-c)^2a^2b^2) \geq abc(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & ((1-2a)^2b^2c^2 + (1-2b)^2c^2a^2 + (1-2c)^2a^2b^2) \geq abc(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Ap dụng bất ñáng thoi AM-GM, ta coi

$$\begin{aligned} & (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \\ \Leftrightarrow & (1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc \end{aligned}$$

Do ñoi

$$\begin{aligned} & ((1-2a)^2b^2c^2 + (1-2b)^2c^2a^2 + (1-2c)^2a^2b^2)(1-a)(1-b)(1-c) \geq \\ & \qquad \qquad \qquad \geq 8a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{1}{a}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{b}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-2\right)^2 \geq \frac{8(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)} \\ \Rightarrow & \text{ñpcm.} \end{aligned}$$

Ñáng thoi xay ra khi va chæ khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$ .

### Bai toan 85. (Voi Quoc Bai Can)

Choi minh rang voi moi so dõng  $a, b, c$  ta ñeu coi

$$3(a^3 + b^3 + c^3) - \frac{24(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} + 36 \geq ab + bc + ca + \sum_{cyc} ab(a+b)$$

*Lõii giai.*

Trõi he xin ñõõc ñhac lai khiõng chõng minh ket quai quen thoi sau

Xet ba daiy  $(a_n), (b_n), (c_n)$  ñõõc xay ñinh bõi

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$$

$$c_{2n+1} = c_{2n}, a_{2n+1} = b_{2n+1} = \frac{a_{2n} + b_{2n}}{2}, \forall n \in N$$

$$a_{2n+2} = b_{2n+1}, b_{2n+2} = c_{2n+2} = \frac{a_{2n+1} + c_{2n+1}}{2}, \forall n \in N$$

Khi ñoij ta coi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{a+b+c}{3} = t$$

Trở lại bài toán của ta

Nhà

$$f(a, b, c) = 3(a^3 + b^3 + c^3) - \frac{24(a^2 + b^2 + c^2)}{a+b+c} - ab - bc - ca - \sum_{cyc} ab(a+b) + 36$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(a, b, c) \geq \min \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c) \right\}$$

Thật vậy, giả sử ngược lại  $f(a, b, c) < \min \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c) \right\}$ . Khi

điều ta có

$$\begin{cases} f(a, b, c) < f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\ f(a, b, c) < f(0, a+b, c) \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &< f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\ \Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{9(a+b)}{4} - \frac{12}{a+b+c} + \frac{a+b+1}{4} - \frac{c}{2} \right) &< 0 \\ \Rightarrow 10a + 10b - 2c + 1 - \frac{48}{a+b+c} &< 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &< f(0, a+b, c) \\ \Leftrightarrow ab \left( -10a - 10b + 2c - 1 + \frac{48}{a+b+c} \right) &< 0 \\ \Leftrightarrow 10a + 10b - 2c + 1 - \frac{48}{a+b+c} &> 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra mâu thuẫn. Vậy ta phải có

$$f(a, b, c) \geq \min \left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c) \right\}$$



Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\min \left\{ f \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c \right), f(0, a+b, c) \right\} \geq 0$$

Trước hết, ta chứng minh

$$f(0, a+b, c) \geq 0 \quad (3)$$

Bằng lập luận tương tự như trên, ta có

$$f(0, a+b, c) \geq \min \left\{ f \left( 0, \frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2} \right), f(0, 0, a+b+c) \right\}$$

Ta lại có

$$f \left( 0, \frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{2} \right) = 4 \left( \frac{a+b+c}{2} \right)^3 - \left( \frac{a+b+c}{2} \right)^2 - 24 \left( \frac{a+b+c}{2} \right) + 36 \geq 0$$

$$f(0, 0, a+b+c) = 6((a+b+c)^3 - 4(a+b+c) + 6) \geq 0$$

Do đó

$$f(0, a+b, c) \geq 0$$

Vậy (3) đúng.

Bây giờ ta sẽ chứng minh

$$f \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c \right) \geq 0 \quad (4)$$

Từ (3) và kết quả trên, ta suy ra nên

$$\begin{aligned} f \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c \right) &= f(a_1, b_1, c_1) \\ &\geq \min \{0, f(a_2, b_2, c_2)\} \\ &\geq \dots \\ &\geq \min \{0, f(a_n, b_n, c_n)\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Do  $f(a, b, c)$  liên tục nên

$$f \left( \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c \right) \geq \min \left\{ 0, \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n, b_n, c_n) \right\} = \min \{0, f(t, t, t)\}$$

Trong ñoù  $t = \frac{a+b+c}{3}$ .

Ta lại coi

$$f(t, t, t) = 3t^3 - 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)^2(t+3) \geq 0$$

Do ñoù

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \geq 0$$

Vậy (4) ñúng.

Tõõ ñây, ta suy ra ñpcm.

Ñáng thờic xảy ra khi và chæ khi  $a = b = c = 2$ .

### Bài toán 86.

Cho  $a, b, c > 0$ . Chõng minh rằng

$$2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 \geq \left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

Áp dụng bất ñáng thờic Bunhiacopxki, ta coi

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \leq 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

Do ñoù ñe chõng minh bất ñáng thờic ñã cho, ta chæ cần chõng minh

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 &\geq 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \\ \Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc &\geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) \end{aligned}$$

Áp dụng bất ñáng thờic AM-GM, ta coi

$$a^3 + ab^2 \geq 2a^2b$$

$$b^3 + bc^2 \geq 2b^2c$$

$$c^3 + ca^2 \geq 2c^2a$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + ab^2 + bc^2 + ca^2 \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a) \quad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Schur thì

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra điều

$$2(a^3 + b^3 + c^3) + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a) + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \geq 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

\* **Case 2.**

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2 \cdot \frac{a^2}{bc} + \frac{c^2}{ab} + 3 \geq 6\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$2 \cdot \frac{b^2}{ca} + \frac{a^2}{bc} + 3 \geq 6\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$2 \cdot \frac{c^2}{ab} + \frac{b^2}{ca} + 3 \geq 6\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow 3 \left( \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right) + 9 \geq 6 \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \right) + 3 \geq 2 \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}} \right) \quad (3)$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$2 \cdot \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} \geq 3 \cdot \frac{a}{c}$$

$$2 \cdot \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq 3 \cdot \frac{b}{a}$$

$$2 \cdot \frac{c^2}{ab} + \frac{a^2}{bc} \geq 3 \cdot \frac{c}{b}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 3\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) \geq 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab} \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra được

$$\begin{aligned} &2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{a}}\right) \\ &\Leftrightarrow 2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 \geq \left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 87. (Phạm Kim Hùng)

Cho  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) \geq a + b + c + \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}$$

*Lời giải.*

Ta có 2 Bất đẳng thức

#### Bất đẳng thức 1. (IMO 1983)

$a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác. Khi đó ta có

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

*Chứng minh.*

Ta có  $a, b, c$  là ba cạnh của một tam giác nên tồn tại các số dương  $x, y, z$

sao cho  $a = y + z, b = z + x, c = x + y$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \\ &\Leftrightarrow a^3c + c^3b + b^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ &\Leftrightarrow x^3y + y^3z + z^3x \geq x^2yz + xy^2z + xyz^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{z} + \frac{z^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y + z$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{x} + \frac{(y-z)^2}{y} + \frac{(z-x)^2}{z} \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Bổ đề 1. Chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$ .

**Bổ đề 2.**

$a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Khi đó ta có

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$$

*Chứng minh.*

Ta có

$$3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - 3\right) \geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} - 3\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (5a - 5b + 3c)(a - b)^2 \geq 0$$

Đặt  $S_a = 5b - 5c + 3a, S_b = 5c - 5a + 3b, S_c = 5a - 5b + 3c$ .

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 1.**  $a \leq b \leq c$ . Khi đó ta có  $S_b \geq 0$  và

$$S_a + S_b = 8b - 2a > 0 \text{ (do } b \geq a)$$

$$S_c + S_b = 8c - 2b > 0$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

+ **Trường hợp 2.**  $a \geq b \geq c$ . Khi đó ta coi  $S_a, S_c \geq 0$ . Do đó nếu  $S_b \geq 0$  thì ta coi ngay  $\text{ñpcm}$ , vì vậy ta chỉ cần xét trường hợp  $S_b \leq 0$  là đủ

+ **Trường hợp 2.1.**  $a + (\sqrt{3} - 1)c \leq \sqrt{3}b \Leftrightarrow a - c \leq \sqrt{3}(b - c)$

Ta coi

$$S_a + 3S_b = 14b + 10c - 12a \geq 12(b + c - a) > 0$$

Do đó

$$S_a(b - c)^2 + S_a(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq (S_a + 3S_b)(b - c)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \text{ñpcm}$ .

+ **Trường hợp 2.2.**  $a + (\sqrt{3} - 1)c \geq \sqrt{3}b \Leftrightarrow a - b \geq (\sqrt{3} - 1)(b - c)$

+ **Trường hợp 2.2.1.**  $a \geq \frac{3b}{2}$

Ta coi

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \geq 8(b + c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a > b + 13(a - b) - 5a = 8\left(a - \frac{3b}{2}\right) \geq 0$$

Do đó

$$S_a(b - c)^2 + S_a(c - a)^2 + S_c(a - b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b - c)^2 + (S_c + 2S_b)(a - b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \text{ñpcm}$ .

+ **Trường hợp 2.2.2.**  $a \leq \frac{3b}{2}$

+ **Trường hợp 2.2.2.1.**  $a + c \geq 2b \Rightarrow c \geq \frac{a}{3}$

Ta coi

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \geq 8(b + c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a \geq \frac{2a}{3} + 13 \cdot \frac{a}{3} - 5a = 0$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  ĩpcm.

+ Tröông hïp 2.2.2.2.  $a + c \leq 2b \Leftrightarrow a - c \leq 2(b - c)$

Ta coi

$$S_a + 4S_b + (\sqrt{3} - 1)^2 S_c = (5a - 5b + 3c)(\sqrt{3} - 1)^2 + 17b + 15c - 17a$$

Do  $a + (\sqrt{3} - 1)c \geq \sqrt{3}b$  nên  $b \leq \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{(\sqrt{3} - 1)c}{\sqrt{3}}$

Suy ra

$$\begin{aligned} 5a - 5b + 3c &\geq 5a - \frac{5a}{\sqrt{3}} - \frac{5(\sqrt{3} - 1)c}{\sqrt{3}} + 3c \\ &= \frac{5(\sqrt{3} - 1)a}{\sqrt{3}} + \frac{(5 - 2\sqrt{3})c}{\sqrt{3}} \\ &> \frac{5(\sqrt{3} - 1)a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Do ñoi

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b + (\sqrt{3} - 1)^2 S_c &> \frac{5(\sqrt{3} - 1)^3 a}{\sqrt{3}} + 17b + 15c - 17a \\ &\geq \frac{5(\sqrt{3} - 1)^3 a}{\sqrt{3}} + 16(b + c) - 17a \\ &> \frac{5(\sqrt{3} - 1)^3 a}{\sqrt{3}} - a > 0 \end{aligned}$$

Do ñoi

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq \left( S_a + 4S_b + (\sqrt{3} - 1)^2 S_c \right) (b-c)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  ĩpcm.

Boãñeà2 ñöôic chöông minh hoan toan.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

Trở lại bài toán của ta

Theo kết quả Bô-nê<sup>2</sup>, ta có

$$\begin{aligned}3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3 \\ \Rightarrow 3(a+b+c)\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) &\geq 2(a+b+c)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right) + 3(a+b+c) \\ \Leftrightarrow 3\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} &\geq 2\left(\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) + 2(a+b+c)\end{aligned}$$

Mặt khác, theo Bô-nê<sup>1</sup> thì

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$$

Do đó

$$\begin{aligned}4\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) &\geq 3\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) + \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \\ &\geq 2\left(\frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a}\right) + 2(a+b+c) \\ \Rightarrow 2\left(\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}\right) &\geq a+b+c + \frac{a^2}{c} + \frac{c^2}{b} + \frac{b^2}{a} \quad (\text{hpcm})\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 88. (Voi Quốc Bài Cánh)

Cho 2 số không âm  $a, b$ . Chứng minh rằng

$$a(a-b)(a-1) + b(b-a)(b-1) + (1-a)(1-b) \geq 0$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a \geq b \geq 0$ .



Có 3 trường hợp xảy ra

+ Trường hợp 1.  $a \geq b \geq 1$ . Khi đó hiển nhiên ta có

$$(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) \geq 0$$

+ Trường hợp 2.  $1 \geq a \geq b \geq 0$ .

+ Trường hợp 2.1.  $a+b \geq 1$ . Khi đó hiển nhiên ta có

$$(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) \geq 0$$

+ Trường hợp 2.2.  $1 \geq a+b \geq 0$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned}(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) &= (a-b)^2(a+b-1) + 1 - a - b + ab \\ &= (1-a-b)(1-(a-b)^2) + ab \\ &\geq 0 \quad (\text{do } 1 \geq a \geq b \geq 0, a+b \leq 1)\end{aligned}$$

+ Trường hợp 3.  $a \geq 1 \geq b \geq 0$ .

Xét hàm số  $f(a) = (a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1)$  với  $a \geq 1$ .

Ta có

$$f'(a) = 3a^2 - 2a - 1 - b^2 + 3b - 2ab$$

$$f''(a) = 6a - 2 - 2b > 0$$

$$\Rightarrow f'(a) \text{ là hàm đồng biến trên } [1, +\infty).$$

$$\Rightarrow f'(a) \geq f'(1) = b(1-b) \geq 0 \quad \forall a \geq 1$$

$$\Rightarrow f(a) \text{ là hàm đồng biến trên } [1, +\infty).$$

$$\Rightarrow f(a) \geq f(1) = b(1-b)^2 \geq 0 \quad \forall a \geq 1.$$

Do đó

$$(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$(a-b)^2(a+b-1) + (a-1)(b-1) \geq 0 \quad (\text{ñpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b) = (1, 0), (1, 1)$ .

**Bài toán 89. (Voi Quốc Bài Cẩn)**

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$2(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \geq (1+abc)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2^3(1+a^3)^3(1+b^3)^3(1+c^3)^3 \geq (1+abc)^3(1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) &= 1 + (a^3 + b^3 + c^3) + (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + a^3b^3c^3 \\ &\geq 1 + 3abc + 3a^2b^2c^2 + a^3b^3c^3 \\ &= (1+abc)^3\end{aligned}$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần chứng minh

$$2^3(1+a^3)^2(1+b^3)^2(1+c^3)^2 \geq (1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3$$

Áp dụng bất đẳng thức Chebyshev, ta có

$$\begin{aligned}2(1+a^3)^2 &= 2(1+a^3)(1+a^3) \\ &\geq (1+a^3)(1+a^2)(1+a) \\ &= (1+a^2)((1+a^3)(1+a) - (1+a^2)^2) + (1+a^2)^3 \\ &= (1+a^2)a(a-1)^2 + (1+a^2)^3 \\ &\geq (1+a^2)^3 \\ \Rightarrow 2(1+a^3)^2 &\geq (1+a^2)^3 > 0\end{aligned}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}2(1+b^3)^2 &\geq (1+b^2)^3 > 0 \\ 2(1+c^3)^2 &\geq (1+c^2)^3 > 0\end{aligned}$$

Do nội

$$\begin{aligned}2^3(1+a^3)^2(1+b^3)^2(1+c^3)^2 &\geq (1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3 \\ \Rightarrow \text{đpcm.}\end{aligned}$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

Bài toán 90. (Voi Quốc Bài Căn)

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Tìm hằng số  $k > 0$  lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{a^2 + kb}{b+c} + \frac{b^2 + kc}{c+a} + \frac{c^2 + ka}{a+b} \geq \frac{3k+1}{2}$$

*Lời giải.*

Ta coi bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{cyc} \frac{2a^2}{b+c} - 1 \right) + k \left( \sum_{cyc} \frac{2a}{a+b} - 3 \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)} - \frac{k(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} - \frac{3k(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} - \frac{k \sum_{cyc} (a-b)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (a-b)^2 ((3-k)a + (3+k)b) \geq 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta coi thể giải với  $a = \min\{a, b, c\}$ .

Đặt  $b = a + x, c = a + y$  ( $x, y \geq 0$ ). Khi đó ta coi

$$\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow x^2((3-k)a + (3+k)(a+x)) + (x-y)^2((3-k)(a+x) + (3+k)(a+y)) + \\ & \quad + y^2((3-k)(a+y) + (3+k)a) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 12(x^2 - xy + y^2)a + 6x^3 + 3(k-1)x^2y - 3(k+1)xy^2 + 6y^3 \geq 0 \quad \forall a, x, y \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2x^3 + (k-1)x^2y - (k+1)xy^2 + 2y^3 \geq 0 \quad \forall x, y \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2t^3 + (k-1)t^2 - (k+1)t + 2 \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - t + 2 \geq kt(1-t) \quad \forall t \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 2t^3 - t^2 - t + 2 \geq kt(1-t) \quad \forall t \in (0, 1) \\ & \Leftrightarrow k \leq \frac{2t^3 - t^2 - t + 2}{t(1-t)} = f(t) \quad \forall t \in (0, 1) \end{aligned}$$

Ta coi

$$f'(t) = -\frac{2(t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1)}{t^2(1-t)^2}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \text{ (nhỏ)} \\ t_2 = \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2} \text{ (lớn)} \end{cases}$$

Qua  $t_1$  thì  $f'(t)$  đổi dấu từ âm sang dương nên

$$f(t) \geq f\left(\frac{1 + \sqrt{2} - \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}\right) = -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1} \quad \forall t \in (0, 1)$$

Do đó

$$k \leq -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1}$$

Qua các lập luận trên, ta suy ra được

$$k_{\max} = -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2\sqrt{2} - 1} - 1}.$$

### Bài toán 91. (Trần Tuấn Anh)

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a, b, c) = a(b - c)^3 + b(c - a)^3 + c(a - b)^3$$

*Lời giải.*

+ Cách 1.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $b$  là số hạng nằm giữa  $a$  và  $c$ .

Nếu tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của  $P$ , trước hết ta sẽ tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số  $f(b) = (1 - b)b^3 - b(1 - b)^3 = -2b^3 + 3b^2 - b$  với  $0 \leq b \leq 1$ .

Ta có

$$f'(b) = -(6b^2 - 6b + 1)$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ b_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \end{cases}$$

Bảng biến thiên của  $f(b)$

|         |   |                        |                        |   |   |
|---------|---|------------------------|------------------------|---|---|
| $b$     | 0 | $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ | $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ | 1 |   |
| $f'(b)$ | - | 0                      | +                      | 0 | - |
| $f(b)$  |   |                        |                        |   |   |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta suy ra ñiều

$$\min_{0 \leq b \leq 1} f(b) = \min \left\{ f(1), f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) \right\}$$

Ta lại có  $f(1) = 0$ ,  $f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$ . Do ñiều

$$\min_{0 \leq b \leq 1} f(b) = f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ .

Xét hàm số  $g(a) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c)$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(a) &= (b-c)^3 - 3b(a-c)^2 + 3c(a-b)^2 + 3b(a+c)^2 - b^3 \\ &= 12abc - b^3 + (b-c)^3 + 3c(a-b)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq 12b^2c - b^3 + (b-c)^3 \\ &= 9b^2c + 3bc^2 - c^3 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(a)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow g(a) \geq g(b) = b(b+c)^3 - b^3(b+c) = bc(b+c)(2b+c) \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \geq b^3(a+c) - b(a+c)^3$$

$$\Rightarrow P(a,b,c) \geq P(a+c,b,0)$$

Xét tiếp hàm số  $h(a) = b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3$

Ta có

$$h'(a) = 3b(a+c)^2 - b^3 + 3b(a-c)^2 - (b-c)^3 - 3c(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow h(a)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow h(a) \geq h(b) = b(b+c)^3 - b^3(b+c) = bc(b+c)(2b+c) \geq 0$$

$$\Rightarrow 3b(a+c)^2 - b^3 + 3b(a-c)^2 - (b-c)^3 - 3c(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) \geq a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

$$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$$

Vậy trong trường hợp này, ta có

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

\* Trường hợp 2.  $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0$ .

Xét hàm số  $k(c) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c)$

Ta có

$$k'(c) = 3b(c-a)^2 + 3b(c+a)^2 - 3a(c-b)^2 - b^3 - (b-a)^3 \geq 0$$

$\Rightarrow k(c)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow k(c) \geq k(b) = b(b+a)^3 - b^3(b+a) = ab(a+b)(a+2b) \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c) \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \geq b^3(a+c) - b(a+c)^3$$

$$\Rightarrow P(a,b,c) \geq P(a+c,b,0)$$

Xét tiếp hàm số  $m(c) = b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3$

Ta coi

$$\begin{aligned}m'(c) &= 3b(c+a)^2 + 3a(c-b)^2 - 3b(c-a)^2 - b^3 + (b-a)^3 \\ &= 12abc + 3a(c-b)^2 - b^3 + (b-a)^3 \\ &\geq 12ab^2 - b^3 + (b-a)^3 \\ &= 3a^2b + 9ab^2 - a^3 \\ &\geq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow m(c)$  là hàm đồng biến.

$$\begin{aligned}\Rightarrow m(c) &\geq m(b) = b(a+b)^3 - b^3(a+b) = ab(a+b)(a+2b) \geq 0 \\ \Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3 &\geq 0 \\ \Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) &\geq a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \\ \Rightarrow P(a+c, 0, b) &\geq P(a, b, c)\end{aligned}$$

Vậy trong trường hợp này, ta cũng coi

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Tóm lại, trong mỗi trường hợp, ta luôn coi

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Mặt khác, ta lại coi

$$P(a+c, b, 0) = b^3(a+c) - (a+c)^3b = b^3(1-b) - (1-b)^3b = f(b)$$

$$P(a+c, 0, b) = (a+c)^3b - b^3(a+c) = (1-b)^3b - b^3(1-b) = -f(b)$$

Do nội theo kết quả trên, ta coi

$$P(a+c, b, 0) \geq -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$P(a+c, 0, b) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Nhờ vậy, ta coi

$$P(a, b, c) \geq -\frac{\sqrt{3}}{18} \quad (1)$$

$$P(a, b, c) \leq \frac{\sqrt{3}}{18} \quad (2)$$

Giá trị tối ưu(1) xảy ra chẳng hạn khi  $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}, c = 0$ .

Giá trị tối ưu(2) xảy ra chẳng hạn khi  $a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, b = 0, c = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ .

Vậy

$$\max P(a, b, c) = \frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$\min P(a, b, c) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

+ Cách 2.

Không mất tính tổng quát, ta coi thế giá trị số  $b$  là số hạng nằm giữa  $a$  và  $c$ .

Ta coi

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \\ &= ab^3 + bc^3 + ca^3 - a^3b - b^3c - c^3a \\ &= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ . Khi đó ta có  $P(a, b, c) \leq 0$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} P(a, b, c) &= -(a-b)(b-c)(a-c) \\ &= -4 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{b-c}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{a-c}{\sqrt{3}+1} \\ &\geq -4 \left( \frac{\frac{a-b}{2} + \frac{b-c}{\sqrt{3}-1} + \frac{a-c}{\sqrt{3}+1}}{3} \right)^3 \\ &= -4 \left( \frac{\frac{(a+b)\sqrt{3}}{2} - c\sqrt{3}}{3} \right)^3 \end{aligned}$$



$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot (3c-1)^3$$

$$\geq -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $\begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{a-b}{2} = \frac{b-c}{\sqrt{3}-1} = \frac{a-c}{\sqrt{3}+1} \geq 0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ c=0 \end{cases}$

\* Trường hợp 2.  $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0$ . Khi đó dễ thấy  $P(a,b,c) \geq 0$ .

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$P(a,b,c) = (c-b)(b-a)(c-a)$$

$$= 4 \cdot \frac{c-b}{2} \cdot \frac{b-a}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{c-a}{\sqrt{3}+1}$$

$$\leq 4 \left( \frac{\frac{c-b}{2} + \frac{b-a}{\sqrt{3}-1} + \frac{c-a}{\sqrt{3}+1}}{3} \right)^3$$

$$= 4 \left( \frac{\frac{(c+b)\sqrt{3}}{2} - a\sqrt{3}}{3} \right)^3$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot (1-3a)^3$$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

$$\text{Giá trị tối thiểu xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} a+b+c=1 \\ \frac{c-b}{2} = \frac{b-a}{\sqrt{3}-1} = \frac{c-a}{\sqrt{3}+1} \geq 0 \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \frac{3+\sqrt{3}}{6} \\ b = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \\ a=0 \end{cases}$$

Từ các chứng minh trên, ta suy ra được

$$\begin{aligned} \max P(a,b,c) &= \frac{\sqrt{3}}{18} \\ \min P(a,b,c) &= -\frac{\sqrt{3}}{18} \end{aligned}$$

### Bài toán 92. (Phạm Văn Thuận)

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a+b+c=1$ . Tùy theo giá trị của  $n \in \mathbb{N}$ , tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P(a,b,c) = a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$$

*Lời giải.*

$$+ n=0 \Rightarrow P(a,b,c) = 1$$

$$+ n=1 \Rightarrow P(a,b,c) = 0$$

+ Xét  $n \geq 2$

a)  $n$  lẻ  $\Rightarrow n \geq 3$ .

Ta sẽ chứng minh

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ .

$$\text{Xét hàm số } g(a) = (a+c)^n b - (a+c)b^n - a(b-c)^n - b(c-a)^n - c(a-b)^n$$

Ta có

$$\begin{aligned} g'(a) &= nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n + nb(a-c)^{n-1} - nc(a-b)^{n-1} \\ &= nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n + n(b(a-c)^{n-1} - c(a-b)^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow g(a)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow g(a) \geq g(b) = (b+c)^n b - (b+c)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+c)^n b - (a+c)b^n \geq a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$$

$$\Rightarrow P(a+c, 0, b) \geq P(a, b, c) \quad (1)$$

Xét tiếp hàm số  $h(a) = (a+c)^n b - (a+c)b^n + a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$

Ta có

$$\begin{aligned} h'(a) &= nb(a+c)^{n-1} - b^n + (b-c)^n - nb(a-c)^{n-1} + nc(a-b)^{n-1} \\ &= nb((a+c)^{n-1} - (a-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n + nc(a-b)^{n-1} \\ &\geq nb((b+c)^{n-1} - (b-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n \\ &= 2nb \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2l+1} b^{n-2l-2} c^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l+1} b^{n-2l-1} c^{2l+1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} c^{2l} \\ &= \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} b^{n-2l-1} c^{2l+1} (2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} c^{2l} - c^n \\ &\geq 0 \quad (\text{do } 2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1} \geq 0 \quad \forall l < n) \end{aligned}$$

$\Rightarrow h(a)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow h(a) \geq h(b) = (b+c)^n b - (b+c)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n \geq (a+c)b^n - (a+c)^n b$$

$$\Rightarrow P(a, b, c) \geq P(a+c, b, 0) \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra trong trường hợp này, ta có

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

\* Trường hợp 2.  $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0$ .

Xét hàm số  $k(c) = (a+c)^n b - (a+c)b^n - a(b-c)^n - b(c-a)^n - c(a-b)^n$

Ta có

$$\begin{aligned} k'(c) &= nb(c+a)^{n-1} - b^n + na(c-b)^{n-1} - nb(c-a)^{n-1} + (b-a)^n \\ &= nb((c+a)^{n-1} - (c-a)^{n-1}) - b^n + (b-a)^n + na(c-b)^{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq nb((b+a)^{n-1} - (b-a)^{n-1}) - b^n + (b-a)^n \\
&= 2nb \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2l+1} b^{n-2l-2} a^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l+1} b^{n-2l-1} a^{2l+1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} a^{2l} \\
&= \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} b^{n-2l-1} a^{2l+1} (2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} a^{2l} - a^n \\
&\geq 0 \quad (\text{do } 2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1} \geq 0 \quad \forall l < n)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow k(c)$  là hàm ñồng biến.

$$\Rightarrow k(c) \geq k(b) = (b+a)^n b - (b+a)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+c)^n b - (a+c)b^n \geq a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$$

$$\Rightarrow P(a+c, 0, b) \geq P(a, b, c) \quad (3)$$

Xét tiếp hàm số  $m(c) = (a+c)^n b - (a+c)b^n + a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$

Ta có:

$$\begin{aligned}
m'(c) &= nb(c+a)^{n-1} - b^n - na(c-b)^{n-1} + nb(c-a)^{n-1} - (b-a)^n \\
&= (nb(c+a)^{n-1} - b^n - (b-a)^n) + n(b(c-a)^{n-1} - a(c-b)^{n-1}) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow m(c)$  là hàm ñồng biến.

$$\Rightarrow m(c) \geq m(b) = (b+a)^n b - (b+a)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n \geq -(a+c)^n b + (a+c)b^n$$

$$\Rightarrow P(a, b, c) \geq P(a+c, b, 0) \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra trong trường ñợp này, ta cũng có:

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Tóm lại, trong mọi trường ñợp, ta luôn có:

$$P(a+c, b, 0) \leq P(a, b, c) \leq P(a+c, 0, b)$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^n - t}{(t+1)^{n+1}}$  với  $t > 0$ .

Ta có:

$$f'(t) = \frac{-t^n + nt^{n-1} + nt - 1}{(t+1)^{n+2}}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^n + nt^{n-1} + nt - 1 = 0$$

Để thấy nếu  $t_0 > 0$  là một nghiệm của phương trình  $f'(t) = 0$  thì  $\frac{1}{t_0}$  cũng là

nghiệm của phương trình  $f'(t) = 0$ . Do đó ta chỉ cần tìm nghiệm của phương trình  $f'(t) = 0$  trên  $(0, 1]$  là đủ.

Xét hàm số  $\varphi(t) = -t^n + nt^{n-1} + nt - 1$  với  $t \in (0, 1]$ .

Ta có

$$\varphi'(t) = n(1 - t^{n-1}) + n(n-1)t^{n-2} > 0 \quad \forall t \in (0, 1]$$

$\Rightarrow \varphi(t)$  là hàm đồng biến trên  $(0, 1]$ .

Ta lại có  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = -1 < 0, \varphi(1) = 2(n-1) > 0$  nên tồn tại duy nhất  $t_1 \in (0, 1]$  sao

cho  $\varphi(t_1) = 0$ .

Do đó phương trình  $f'(t) = 0$  chỉ có 2 nghiệm phân biệt là  $t_1$  và  $\frac{1}{t_1}$ .

Qua  $t_1$  thì  $f'(t)$  đổi dấu từ âm sang dương, qua  $\frac{1}{t_1}$  thì  $f'(t)$  đổi dấu từ dương

sang âm nên

$$f(t) \leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} \quad \forall t > 0$$

Ta lại có nếu  $b > 0$  thì

$$\begin{aligned} P(a+c, 0, b) &= (a+c)^n b - (a+c)b^n = \frac{(a+c)^n b - (a+c)b^n}{(a+b+c)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{a+c}{b}\right)^n - \left(\frac{a+c}{b}\right)}{\left(\frac{a+c}{b} + 1\right)^{n+1}} \\ &= f\left(\frac{a+c}{b}\right) \end{aligned}$$

$$P(a+c, b, 0) = -(a+c)^n b + (a+c)b^n$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(a+c)^n b - (a+c)b^n}{(a+b+c)^{n+1}} \\
&= -\frac{\left(\frac{a+c}{b}\right)^n - \left(\frac{a+c}{b}\right)}{\left(\frac{a+c}{b} + 1\right)^{n+1}} \\
&= -f\left(\frac{a+c}{b}\right)
\end{aligned}$$

Nên theo trên, ta có

$$\begin{aligned}
P(a+c, 0, b) &\leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} = \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} \\
P(a+c, 0, b) &\geq -\max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} = -\max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu  $b = 0$  thì ta có  $P(a+c, b, 0) = P(a+c, 0, b) = 0$  nên ta luôn có

$$\begin{aligned}
P(a+c, 0, b) &\leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} = \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} \\
P(a+c, 0, b) &\geq -\max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} = -\max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}
\end{aligned}$$

Do vậy ta có

$$-\max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} \leq P(a, b, c) \leq \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

Để thấy rằng năng thức luôn xảy ra nên ta có

$$\begin{aligned}
\min P(a, b, c) &= -\max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} \\
\max P(a, b, c) &= \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}
\end{aligned}$$

b)  $n$  chẵn  $\Rightarrow n \geq 2$ .

Khi đó để thấy  $\min P(a,b,c) = 0$  và  $P(a,b,c)$  là một biểu thức nội xứng với  $a, b$  và  $c$  nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0$ .

Ta sẽ chứng minh

$$P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Xét hàm số  $u(a) = (a+c)^n b - (a+c)b^n - a(b-c)^n - b(c-a)^n - c(a-b)^n$

Ta có

$$\begin{aligned} u'(a) &= nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n + nb(a-c)^{n-1} - nc(a-b)^{n-1} \\ &= nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n + n(b(a-c)^{n-1} - c(a-b)^{n-1}) \\ &\geq nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow u(a)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow u(a) \geq u(b) = (b+c)^n b - (b+c)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+c)^n b - (a+c)b^n \geq a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$$

$$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$$

Theo trên, ta lại có

$$P(a+c,0,b) \leq \max \left\{ \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\} = \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

Do đó

$$P(a,b,c) \leq \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

Ngoài ra, ta cũng dễ thấy rằng thức luôn xảy ra nên

$$\max P(a,b,c) = \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

Kết luận

$$+ n = 0 \Rightarrow P(a,b,c) = 1$$

$$+ n = 1 \Rightarrow P(a,b,c) = 0$$

$$+ n \geq 2 \Rightarrow \max P(a, b, c) = \max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

$$* n \text{ lẻ} \Rightarrow \min P(a, b, c) = -\max \left\{ 0, f\left(\frac{1}{t_1}\right) \right\}$$

$$* n \text{ chẵn} \Rightarrow \min P(a, b, c) =$$

trong ñoù  $f(t) = \frac{t^n - t}{(t+1)^{n+1}}$  và  $t_1$  là nghiệm ñồng duy nhất thuộc  $(0, 1]$  của phương

trình  $-t^n + nt^{n-1} + nt - 1 = 0$ .

### Bài toán 93. (Vietnam TST 1996)

Cho các số thực  $a, b, c$  bất kỳ. Chứng minh rằng

$$F(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4) \geq 0$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\begin{aligned} F(a, b, c) - F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) &= \\ &= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + b^4 + c^4) - \\ &\quad - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 - (b+c)^4 + \frac{4}{7} \cdot \left(a^4 + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right) \\ &= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 + \frac{4}{7} \left(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\right) \\ &= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + 2c^2 - (b+c)^2) + \frac{3}{7} \left(b^4 + c^4 - \frac{(b+c)^4}{8}\right) \\ &= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \frac{3}{56} \cdot (b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \\ &= 3a(a+b+c)(b-c)^2 + \frac{3}{56} \cdot (b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc) \end{aligned}$$



So sánh cuối cùng luôn luôn không âm. Nếu  $a, b, c$  cùng dấu thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu  $a, b, c$  không cùng dấu thì phải có ít nhất một trong ba số  $a, b, c$  cùng dấu với  $a + b + c$ . Không mất tính tổng quát, giả sử số đó là  $a$ . Từ bất đẳng thức trên ta suy ra  $F(a, b, c) \geq F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right)$ . Nhờ vậy, ta cần

chứng minh

$$F(a, b, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^4 + (2b)^4 - \frac{4}{7} \cdot (a^4 + 2b^4) \geq 0$$

Nếu  $b = 0$  thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu  $b \neq 0$ , chia hai vế của bất đẳng thức cho  $b^4$  rồi đặt  $x = \frac{a}{b}$  thì ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể chứng minh nhờ sau

Xét hàm số  $f(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2)$

Ta có

$$f'(x) = 8(x+1)^3 - \frac{16}{7} \cdot x^3$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x+1 = \sqrt[3]{\frac{2}{7}} \cdot x \Leftrightarrow x = -2.9294.$$

$$f_{\min} = f(-2.9294) = 0.4924 > 0$$

(Các phần tính toán cuối được tính với độ chính xác tới 4 chữ số sau dấu phẩy. Do  $f_{\min}$  tính được là 0.4924 nên nếu tính sai số tuyệt đối thì giá trị chính xác của  $f_{\min}$  vẫn là một số dương. Vì vậy là một bất đẳng thức rất chặt nên không thể

trình nổi các tính toán với số lẻ trên này. Chẳng hạn nếu thay  $\frac{4}{7}$  bằng  $\frac{16}{27}$

nếu  $x_{\min} = -3$  thì  $f_{\min}^*$  có giá trị âm! Ở đây  $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7} \cdot (x^4 + 2)$ .

### \* Chú ý

Ta có thể nêu bài toán về chứng minh  $F(a, b, b) \geq 0 \quad \forall a, b \in \mathbf{R}$  bằng cách sử dụng

Bô-nê-sau

**Bô-nê**  $\forall a, b, c \in \mathbf{R}$  thì tồn tại các số thực  $x_0, y_0, x_1, y_1$  sao cho

$$\begin{aligned} p &= a + b + c = 2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1 \\ q &= ab + bc + ca = x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1 \\ x_0^2y_0 &\leq r = abc \leq x_1^2y_1 \end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu  $a, b, c \geq 0$  thì  $x_0, x_1, y_1 \geq 0$ . Trong đó

$$\begin{aligned} + \text{ Nếu } p^2 &\geq 4q \text{ thì } y_0 \leq 0 \\ + \text{ Nếu } p^2 &\leq 4q \text{ thì } y_0 \geq 0 \end{aligned}$$

### Bài toán 94. (Phạm Kim Hưng)

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a + b + c = 3$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a, b, c) = a^k(b+c) + b^k(c+a) + c^k(a+b)$$

trong đó  $k > 0$  là hằng số cho trước.

### Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$ .

Có 3 trường hợp xảy ra

\* **Trường hợp 1.**  $1 > k > 0$ . Khi đó áp dụng bất đẳng thức Holder, ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &= a^k(b+c) + b^k(c+a) + c^k(a+b) \\ &= a^k(3-a) + b^k(3-b) + c^k(3-c) \\ &= 3(a^k + b^k + c^k) - (a^{k+1} + b^{k+1} + c^{k+1}) \\ &\leq 3 \cdot \frac{(a+b+c)^k}{3^{k-1}} - \frac{(a+b+c)^{k+1}}{3^k} = 6 \end{aligned}$$

Những thời xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

\* Trường hợp 2.  $k > 2$ . Khi này ta sẽ chứng minh

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\leq f(a, b+c, 0) \\ \Leftrightarrow a^k(b+c) + b^k(c+a) + c^k(a+b) &\leq a^k(b+c) + (b+c)^k a \\ \Leftrightarrow b^k(c+a) + c^k(a+b) &\leq (b+c)^k a \\ \Leftrightarrow ((b+c)^k - b^k - c^k)a &\geq b^k c + bc^k \end{aligned}$$

Do  $k > 2$  nên

$$\begin{aligned} (b+c)^k - b^k - c^k &= (b+c)^{k-1}(b+c) - b^k - c^k \\ &\geq (b^{k-1} + c^{k-1})(b+c) - b^k - c^k \\ &= b^{k-1}c + bc^{k-1} \\ \Rightarrow ((b+c)^k - b^k - c^k)a &\geq (b^{k-1}c + bc^{k-1})a \geq b^k c + bc^k \quad (\text{do } a \geq b \geq c \geq 0) \\ \Rightarrow f(a, b, c) &\leq f(a, b+c, 0) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a, b, 0) = a^k b + b^k a$$

trong nội  $a, b \geq 0$  thỏa  $a + b = 3$ .

Không mất tính tổng quát, ta coi thể giả sử  $a \geq b \geq 0 \Rightarrow a > 0$ . Khi này ta coi

$$f(a, b, 0) = a^k b + b^k a = 3^{k+1} \cdot \frac{a^k b + b^k a}{(a+b)^{k+1}} = 3^{k+1} g(t)$$

$$\text{trong nội } g(t) = \frac{t^k + t}{(t+1)^{k+1}} \text{ với } t = \frac{b}{a} \leq 1.$$

Ta coi

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{-t^k + kt^{k-1} - kt + 1}{(t+1)^{k+2}} \\ g'(t) = 0 &\Leftrightarrow -t^k + kt^{k-1} - kt + 1 = 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Đã thấy 1 là một nghiệm của phương trình (\*). Gọi  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  là tất cả các nghiệm thuộc  $[0, 1]$  nếu có phương trình (\*). Khi này đã thấy

$$g(t) \leq \max\{g(1), g(\alpha_i)\} \quad \forall t \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow f(a, b, 0) \leq 3^{k+1} \max\{g(1), g(\alpha_i)\}$$

Ngoài ra, để thấy rằng thức luôn xảy ra.

\* Trường hợp 3.  $2 \geq k \geq 1$ .

Đặt  $a + b = 2t, a - b = 2u \Rightarrow t \geq u \geq 0, t \geq c \geq 0$ . Khi đó ta có

$$f(a, b, c) = (t+u)^k(t-u+c) + (t-u)^k(t+u+c) + 2c^k t = h(u)$$

Ta có

$$\begin{aligned} h'(u) &= k(t+u)^{k-1}(t-u+c) - (t+u)^k - k(t-u)^{k-1}(t+u+c) + (t-u)^k \\ &= (t+u)^{k-1}((k-1)t - (k+1)u + kc) - (t-u)^{k-1}((k-1)t + (k+1)u + kc) \end{aligned}$$

Nếu  $\begin{cases} t = u \\ (k-1)t - (k+1)u + kc \leq 0 \end{cases}$  thì ta có  $h'(u) \leq 0$ .

Nếu  $\begin{cases} t > u \\ (k-1)t - (k+1)u + kc > 0 \end{cases}$  thì do  $2 \geq k \geq 1$  nên  $(t+u)^{k-1} \leq (t+u)(t-u)^{k-2}$ . Do

đó ta có

$$\begin{aligned} h'(u) &\leq (t+u)(t-u)^{k-2}((k-1)t - (k+1)u + kc) - \\ &\quad - (t-u)^{k-1}((k-1)t + (k+1)u + kc) \\ &= (t-u)^{k-2}((t+u)((k-1)t - (k+1)u + kc) - (t-u)((k-1)t + (k+1)u + kc)) \\ &= -2u(t-u)^{k-2}(2t - kc) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Tóm lại, ta luôn có  $h'(u) \leq 0 \Rightarrow h(u)$  là hàm nghịch biến trên  $[0, +\infty)$ . Do đó

$$f(a, b, c) = h(u) \leq h(0) = f(t, t, c)$$

Bây giờ ta sẽ tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(t, t, c) = 2t^k(t+c) + 2tc^k$$

trong đó  $t \geq c \geq 0$  thỏa  $2t + c = 3$ .

Ta có

$$f(t, t, c) = 2t^k(t+c) + 2tc^k = 2 \cdot 3^{k+1} \cdot \frac{t^k(t+c) + tc^k}{(2t+c)^{k+1}} = 2 \cdot 3^{k+1} \varphi(x)$$

trong ñoù  $\varphi(x) = \frac{x^k + x + 1}{(x + 2)^{k+1}}$  và  $x = \frac{c}{t} \leq 1$ .

Ta coi

$$\varphi'(x) = \frac{-x^k + 2kx^{k-1} - kx + 1 - k}{(x + 2)^{k+2}}$$

$$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^k + 2kx^{k-1} - kx + 1 - k = 0 \quad (**)$$

Đã thấy 1 là một nghiệm của phương trình (\*\*). Gọi  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n$  là tất cả các nghiệm thuộc  $[0, 1]$  của phương trình (\*\*). Khi ñó đã thấy

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\leq \max\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\beta_i)\} \quad \forall x \in [0, 1] \\ \Rightarrow f(t, t, c) &\leq 2 \cdot 3^{k+1} \max\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\beta_i)\} \end{aligned}$$

Ngoài ra, đã thấy ñăng thối luôn xảy ra.

Kết luận

$$\begin{aligned} + 1 > k > 0 &\Rightarrow \max f(a, b, c) = 6 \\ + 2 \geq k \geq 1 &\Rightarrow \max f(a, b, c) = 2 \cdot 3^{k+1} \max\{\varphi(0), \varphi(1), \varphi(\beta_i)\} \\ + k > 2 &\Rightarrow \max f(a, b, c) = 3^{k+1} \max\{g(1), g(\alpha_i)\} \end{aligned}$$

trong ñoù

$$+ \varphi(x) = \frac{x^k + x + 1}{(x + 2)^{k+1}} \text{ và } \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_n \text{ là tất cả các nghiệm thuộc } [0, 1] \text{ của}$$

phương trình  $-x^k + 2kx^{k-1} - kx + 1 - k = 0$ .

$$+ g(t) = \frac{t^k + t}{(t + 1)^{k+1}} \text{ và } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m \text{ là tất cả các nghiệm thuộc } [0, 1] \text{ của}$$

phương trình  $-x^k + 2kx^{k-1} - kx + 1 - k = 0$ .

**Bài toán 95. (Voi Quốc Bài Căn)**

Chứng minh rằng với mọi số dương  $x, y, z$  thỏa  $xy + yz + zx = 1$  ta luôn có bất đẳng thức

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức sau

**Bổ đề**  $x, y, z$  là các số thực thỏa  $\begin{cases} x + y + z \geq 0 \\ xy + yz + zx \geq 0 \end{cases}$ . Khi đó ta có

$$x(b-c)^2 + y(c-a)^2 + z(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Bổ đề trên chứng minh rất đơn giản (chỉ cần dùng tam thức bậc hai là được) nên ở đây ta không nhắc lại chứng minh của nó

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z \right) + x + y + z - \sqrt{3} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{y} + \frac{1}{2} \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{x+y+z+\sqrt{3}} \geq \sum_{cyc} (x-y)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} (x-y)^2 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_x = \frac{1}{z} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1$$

$$S_y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1$$

$$S_z = \frac{1}{y} + \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})} - 1$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} S_x + S_y + S_z &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &= \frac{xy+yz+zx}{xyz} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{xyz} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &\geq \frac{3\sqrt{3}}{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &= 3\sqrt{3} - 3 + \frac{3}{2(x+y+z+\sqrt{3})} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Đặt  $t = \frac{1}{2(x+y+z+\sqrt{3})}$ . Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x &= \left(t + \frac{1}{x} - 1\right) \left(t + \frac{1}{y} - 1\right) + \left(t + \frac{1}{y} - 1\right) \left(t + \frac{1}{z} - 1\right) + \\ &\quad + \left(t + \frac{1}{z} - 1\right) \left(t + \frac{1}{x} - 1\right) \\ &= 3t^2 + 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 3\right)t + \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3 \\ &> \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} - 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 3 \\ &= \frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz} \end{aligned}$$

Ta chứng minh

$$\frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+3xyz-2 \geq 0$$

(\*)

Neu  $x + y + z \geq 2$  thì (\*) hiển nhiên đúng.

Neu  $x + y + z \leq 2$ , đặt  $p = x + y + z \Rightarrow 2 \geq p \geq \sqrt{3}$ . Thế thì theo bất đẳng thức

Schur, ta có

$$xyz \geq \frac{4p - p^3}{9}$$

Do đó

$$p + 3xyz - 2 \geq p - 2 + \frac{4p - p^3}{3} = \frac{-p^3 + 7p - 6}{3} = \frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3} \geq 0$$

$\Rightarrow$  (\*) đúng.

Vậy ta có  $\begin{cases} S_x + S_y + S_z > 0 \\ S_x S_y + S_y S_z + S_z S_x > 0 \end{cases}$  nên theo Bô-nê-tre-in, ta có

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0 \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Bài toán 96.

Cho  $a, b, c, d \geq 0$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+bcd} + \frac{b}{1+cda} + \frac{c}{1+dab} + \frac{d}{1+abc}$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{a^2}{a+abcd} + \frac{b^2}{b+abcd} + \frac{c^2}{c+abcd} + \frac{d^2}{d+abcd} \\ &\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+4abcd} \\ &= \frac{1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{a+b+c+d+4abcd} \end{aligned}$$

Ta lại có

$$1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - (a+b+c+d+4abcd) =$$



$$\begin{aligned}
&= (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + \\
&\quad + (abc + bcd + cda + dab) - 5abcd \\
&\geq (ab + ac + ad + bc + bd + cd) + (abc + bcd + cda + dab) - 5abcd \\
&\geq 0 \\
&\Rightarrow 1 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) \geq a + b + c + d + 4abcd \\
&\Rightarrow \frac{1 + 2(ab + ac + ad + bc + bd + cd)}{a + b + c + d + 4abcd} \geq 1 \\
&\Rightarrow P \geq 1
\end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c, d) = (1, 0, 0, 0)$ .

Vậy

$$\min P = 1.$$

### Bài toán 97. (Vasile Cirtoaje)

Chứng minh rằng với mọi số thực  $a, b, c$  ta luôn có bất đẳng thức

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a)$$

*Lời giải.*

\* Cách 1.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a = \min\{a, b, c\}$ .

Đặt  $b = a + p, c = a + q$  ( $p, q \geq 0$ ). Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a) \\
&\Leftrightarrow f(a) = (p^2 - pq + q^2)a^2 - (p^3 - 5p^2q + 4pq^2 + q^3) + \\
&\quad + (p^4 - 3p^3q + 2p^2q^2 + q^4) \geq 0
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\Delta_f &= -3(p^3 - p^2q - 2pq^2 + q^3)^2 \leq 0 \\
&\Rightarrow f(a) \geq 0 \\
&\Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

\* Cách 2.

Ta có

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \frac{1}{2} \sum_{\text{cyc}} (a^2 - 2ab + bc - c^2 + ca)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a) \quad (\text{ñpcm})$$

\* **Caich 3.**

Ta coi

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 - 3(a^3b + b^3c + c^3a) = \frac{1}{6} \sum_{\text{cyc}} (2a^2 - b^2 - c^2 + 3bc - 3ab)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(a^3b + b^3c + c^3a) \quad (\text{ñpcm})$$

Ñaïng thoiç xaïy ra khi vaøchaø khi

$$\begin{cases} a = b = c \\ a : b : c = \sin^2 \frac{4\pi}{7} : \sin^2 \frac{2\pi}{7} : \sin^2 \frac{\pi}{7} \end{cases}$$

\* **Nhaïn xeit.**

Ñaïy laø moät baät ñaïng thoiç maïnh vaø coi nhieäu öng duïng. Sau ñaïy laø moät soá öng duïng cuïa noùi

+ **Öng duïng 1. (Vasile Cirtoaje)**

Cho  $a, b, c > 0$  thoiç  $a + b + c = 3$ . Chöïng minh raïng

$$\frac{a}{ab+1} + \frac{b}{bc+1} + \frac{c}{ca+1} \geq \frac{3}{2}$$

**Löi giaïi.**

Ta coi

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{ab+1} &= \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a}{ab+1} - a \right) + a + b + c \\ &= 3 + \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a}{ab+1} - a \right) \\ &= 3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b}{ab+1} \\ &\geq 3 - \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2b}{2\sqrt{ab}} \quad (\text{theo bñt AM-GM}) \end{aligned}$$

$$= 3 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{cyc}} a^{3/2} b^{1/2}$$

Theo trên, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} a^{3/2} b^{1/2} \leq \frac{1}{3} \cdot (a+b+c)^2 = 3$$

Do ão

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a}{ab+1} \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{cyc}} a^{3/2} b^{1/2} \geq 3 - \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$  ãpcm.

Ñáng thời xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

+ Òng ðng 2.

Cho các số không âm  $a, b, c, x$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{1+xab} + \frac{b^2}{1+xbc} + \frac{c^2}{1+xca} \geq \frac{3}{3+x}$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất ãng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+xab} + a^2(1+xab) \left( \frac{3}{3+x} \right)^2 &\geq \frac{6a^2}{3+x} \\ \frac{b^2}{1+xbc} + b^2(1+xbc) \left( \frac{3}{3+x} \right)^2 &\geq \frac{6b^2}{3+x} \\ \frac{c^2}{1+xca} + c^2(1+xca) \left( \frac{3}{3+x} \right)^2 &\geq \frac{6c^2}{3+x} \\ \Rightarrow \frac{a^2}{1+xab} + \frac{b^2}{1+xbc} + \frac{c^2}{1+xca} &\geq \frac{6}{3+x} - \left( \frac{3}{3+x} \right)^2 - x \left( \frac{3}{3+x} \right)^2 (a^3b + b^3c + c^3a) \end{aligned}$$

Theo trên, ta có

$$a^3b + b^3c + c^3a \leq \frac{1}{3} \cdot (a^2 + b^2 + c^2)^2 = \frac{1}{3}$$

Do ão

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{1+xab} + \frac{b^2}{1+xbc} + \frac{c^2}{1+xca} &\geq \frac{6}{3+x} - \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 - x \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 (a^3b + b^3c + c^3a) \\ &\geq \frac{6}{3+x} - \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 - x \left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{3}{3+x} \\ \Rightarrow \frac{a^2}{1+xab} + \frac{b^2}{1+xbc} + \frac{c^2}{1+xca} &\geq \frac{3}{3+x} \quad (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

### Bài toán 98. (Komal)

Cho các số dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{3}{a+b+c} \geq \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \cdot \frac{2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$ab + bc + ca - \frac{3abc}{a+b+c} \geq \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Do cả hai vế của bất đẳng thức này đồng bậc nên không mất tính tổng quát, ta có

thế giá trị  $a + b + c = 1$ . Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow \frac{1}{3} \geq q \geq 0, r \geq 0$ . Khi đó ta

có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} q - 3r &\geq \frac{2(q^2 - 2r)}{1 - 2q} \\ \Leftrightarrow r(6q + 1) + q(1 - 4q) &\geq 0 \end{aligned}$$

Nếu  $1 \geq 4q$  thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Nếu  $4q \geq 1$  thì theo bất đẳng thức Schur, ta có  $r \geq \frac{4q - 1}{9} \geq 0$ . Do đó

$$r(6q+1) + q(1-4q) \geq \frac{(4q-1)(6q+1)}{9} + q(1-4q) = \frac{(4q-1)(1-3q)}{9} \geq 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài toán 99. (Nguyễn Anh Cường)

Cho các số dương  $x, y, z$  thỏa  $x + y + z = 1$ . Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(x+z)} + \sqrt{yz}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+z)(y+x)} + \sqrt{zx}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z+x)(z+y)} + \sqrt{xy}}} \geq 2$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tổng đồng với

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(x+z)} + \sqrt{yz}}} \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+y+z)} + \sqrt{yz}} + \sqrt{yz}} \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \frac{yz}{x}} + \sqrt{\frac{yz}{x}}}} \geq 2 \end{aligned}$$

Đặt  $m = \sqrt{\frac{yz}{x}}, n = \sqrt{\frac{zx}{y}}, p = \sqrt{\frac{xy}{z}}$  thì ta có  $m, n, p > 0$  và  $mn + np + pm = 1$ . Khi đó

ta có bất đẳng thức cần chứng minh tổng đồng với

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{m^2+1} + m}} \geq 2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \sqrt{\sqrt{m^2+1} - m} \geq 2 \end{aligned}$$

Đặt  $a = \sqrt{m^2+1} - m, b = \sqrt{n^2+1} - n, c = \sqrt{p^2+1} - p$  thì ta có  $1 > a, b, c > 0$  và

$$\begin{aligned} m &= \frac{1-a^2}{2a} \\ n &= \frac{1-b^2}{2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1-c^2}{2c} \\
\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{4ab} &= mn + np + pm = 1 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} c(1-a^2)(1-b^2) &= 4abc \\
\Leftrightarrow (a+b+c) - \sum_{cyc} ab(a+b) + abc(ab+bc+ca) &= 4abc \\
\Leftrightarrow (a+b+c-abc)(1-ab-bc-ca) &= 0 \quad (*)
\end{aligned}$$

Do  $1 > a, b, c > 0$  nên  $a+b+c-abc > 0$ . Do ñoù

$$(*) \Leftrightarrow ab+bc+ca = 1$$

Do ñoù ñeà chöng minh bất ñáng thöïc ñeà cho, ta chæ càn chöng minh

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq 2 \quad (**)$$

trong ñoù  $a, b, c > 0$  thoà  $ab+bc+ca = 1$ .

Ta coi

$$(**) \Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^4 \geq 16(ab+bc+ca) \quad (***)$$

Do cái 2 veà của bất ñáng thöïc trên ñöng bất nên không mất tính tổng quát, ta coi

thé giáisöù  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ .

Ñeà  $q = \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}, r = \sqrt{abc} \Rightarrow \frac{1}{3} \geq q \geq 0, r \geq 0$ . Khi ñoù ta coi

$$\begin{aligned}
(***) &\Leftrightarrow 1 \geq 16(q^2 - 2r) \\
&\Leftrightarrow 32r + (1-4q)(1+4q) \geq 0
\end{aligned}$$

Neà  $1 \geq 4q$  thì bất ñáng thöïc trên hiển nhiên ñöng.

Neà  $4q \geq 1$  thì theo bất ñáng thöïc Schur, ta coi  $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ . Do ñoù

$$32r + (1-4q)(1+4q) \geq \frac{32(4q-1)}{9} + (1-4q)(1+4q) = \frac{(4q-1)(23-36q)}{9} \geq 0$$

$\Rightarrow (***)$  ñöng.

$\Rightarrow$  ñpcm.

Bài toán 100. (Phạm Kim Hùng, Võ Quốc Bài Cảnh)

Cho  $a, b, c \geq 0$  thỏa  $a + b + c = 1$ . Tìm điều kiện cần và đủ với  $a, b, c$  để bất đẳng thức sau đúng

$$(a^2 + b^2 + c^2)(8a^2b^2 + 8b^2c^2 + 8c^2a^2 + 19abc) \geq ab + bc + ca$$

*Lời giải.*

Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để bất đẳng thức trên đúng là  $\sqrt{a}, \sqrt{b}$  và  $\sqrt{c}$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

+ Điều kiện cần.

Giả sử  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  không là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

Khi đó cho  $c = 0, a, b > 0$  thì bất đẳng thức trên trở thành

$$\begin{aligned} 8(a^2 + b^2)a^2b^2 &\geq ab \\ \Leftrightarrow 8(a^2 + b^2)ab &\geq 1 \end{aligned} \quad (*)$$

Cho  $a = 1, b \rightarrow 0^+$  thì ta có  $\lim_{b \rightarrow 0^+} 8ab(a^2 + b^2) = 0 < 1$  nên (\*) không đúng.

Vậy ta phải có  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

+ Điều kiện đủ

Giả sử  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến). Khi đó ta sẽ chứng minh

$$(a^2 + b^2 + c^2)(8a^2b^2 + 8b^2c^2 + 8c^2a^2 + 19abc) \geq ab + bc + ca$$

Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow \frac{1}{3} \geq q \geq 0, r \geq 0$ . Do  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  là ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến) nên

$$\begin{aligned} 4q - 1 &= (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c} - \sqrt{a})(\sqrt{c} + \sqrt{a} - \sqrt{b}) > 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{3} &\geq q \geq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Do ñoù theo bất ñáng thòc Schur, ta coi  $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ .

Bất ñáng thòc cần chứng minh tõng ñõng với

$$(1-2q)(19r+8(q^2-2r)) \geq q$$

$$\Leftrightarrow (1-2q)(3r+8q^2) \geq q \quad (**)$$

Ta coi

$$\begin{aligned} (1-2q)(3r+8q^2) - q &\geq (1-2q)\left(\frac{4q-1}{3} + 8q^2\right) - q \\ &= \frac{(4q-1)(1-3q)(4q+1)}{3} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Do ñoù(\*\*) ñúng.

Vây ñiều kiện cần và ñủ ñể bất ñáng thòc ñã cho ñúng là  $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$  là ñoã dài ba cạnh của một tam giác (có thể suy biến).

### Bài toán 101. (Titu Andreescu)

Cho các số thòc  $a, b$  thòc  $3(a+b) \geq 2|ab+1|$ . Chứng minh rằng

$$9(a^3+b^3) \geq |a^3b^3+1|$$

*Lời giải.*

Ñặt  $S = a+b, P = ab$  thì tõng ñã thiet, ta coi  $3S \geq 2|P+1|$  (\*). Bất ñáng thòc cần chứng minh trở ñành

$$9S(S^2-3P) \geq |P+1|(P^2-P+1)$$

Coi 2 trường hợp xảy ra

\* Trường hợp 1.  $P \leq \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \vee P \geq \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ . Khi ñoù tõng (\*), ta coi

$$9S(S^2-3P) \geq 6|P+1|\left(\frac{4(P+1)^2}{9} - 3P\right) = \frac{2|P+1|(4P^2-19P+4)}{3}$$



Do ñoù ñeàchöng minh baát ñaúng thöïc ñaùcho, ta chæ can chöng minh

$$2(4P^2 - 19P + 4) \geq 3(P^2 - P + 1)$$

$$\Leftrightarrow 5 \left( P - \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \right) \left( P - \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \right) \geq 0 \quad (\text{ñuing})$$

\* Tröông hïp 2.  $\frac{7-3\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ . Töõ ñaáy, ta coi  $a, b$  cung daáu, töõ ñoù töõ giaù

thieát, ta suy ra ñöôc  $a, b > 0$ . Khi ñoù (\*) trôuthanh  $3S \geq 2(P+1) \Rightarrow 0 < P \leq \frac{3S-2}{2}$ .

Baát ñaúng thöïc can chöng minh trôuthanh

$$9S(S^2 - 3P) \geq P^3 + 1$$

$$\Leftrightarrow 9S^3 - 27PS - P^3 - 1 \geq 0$$

+ Tröông hïp 2.1.  $\frac{S^2}{4} \geq \frac{3S-2}{2} \Leftrightarrow S^2 - 6S + 4 \geq 0$ . Khi ñoù ta coi

$$9S^3 - 27PS - P^3 - 1 \geq 9S^3 - \frac{27S(3S-2)}{2} - \frac{(3S-2)^3}{8} - 1$$

$$= \frac{45S(S^2 - 6S + 4)}{8}$$

$$\geq 0$$

+ Tröông hïp 2.2.  $\frac{S^2}{4} \leq \frac{3S-2}{2} \Leftrightarrow (3-\sqrt{5})^3 \leq S^3 \leq (3+\sqrt{5})^3$ . Khi ñoù ta coi

$$9S^3 - 27PS - P^3 - 1 \geq 9S^3 - \frac{27S^3}{4} - \frac{S^6}{64} - 1$$

$$= \frac{\left( (3+\sqrt{5})^3 - S^3 \right) \left( S^3 - (3-\sqrt{5})^3 \right)}{64}$$

$$\geq 0$$

Töim laï, trong moï tröông hïp, ta luon coi  $9S(S^2 - 3P) \geq |P^3 + 1|$  (ñpcm)

Ñaúng thöïc xaáy ra khi vaichæ khi  $(a, b) = \left( \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right), \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)$ .

## Bài toán 102. (Phạm Kim Hưng)

Cho các số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2} + \frac{b^3}{2b^2+c^2} + \frac{c^3}{2c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0$$

Có 2 trường hợp xảy ra

+ Trường hợp 1.  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Khi này ta có

$$\begin{aligned} & \frac{4b}{2a^2+b^2} - \frac{c}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ & \frac{-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{4b-2a}{2a^2+b^2} + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{4b-2a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{(4c-2b)b^2}{2b^2+c^2} + \frac{(2a-c)a^2}{2c^2+a^2} \geq 0 \\ \Rightarrow & \frac{4c-2b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Cộng các bất đẳng thức (1) và (2) vế theo vế rồi chia cả hai vế cho 2, ta được

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0$$

+ Trường hợp 2.  $c \geq b \geq a \geq 0$ .

+ Trường hợp 2.1.  $2b \geq c+a$ . Khi này ta sẽ chứng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2} \geq 0$$

Thật vậy, để thấy vết trái là hàm tăng của  $c$  nên ta chỉ cần chứng minh khi  $c = b$ ,  
 tức là chứng minh

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-b)}{2b^2+a^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 4b^3 + 2a^2b - 2ab^2 + 16a^3 - 8a^2b + 8ab^2 - 4b^3 \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 3a(5a^2 - 2ab + 2b^2) \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

Do đó  $\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2} \geq 0$

Vậy

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq \\ & \geq \frac{2b-a}{4(2a^2+b^2)} \cdot (c-a)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

+ Trường hợp 2.2.  $2b \leq c + a$ . Khi đó ta sẽ chứng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{6a-3c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (3)$$

Thật vậy, để thấy vết trái là hàm tăng của  $c$  nên chỉ cần chứng minh khi  $c = 2b - a$ . Bất  
 đẳng thức (3) trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{9a-6b}{8b^2+3a^2-8ab} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 10b^3 - 15b^2a + 2a^2b + 15a^3 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$\frac{2c-b}{2b^2+c^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0 \quad (4)$$

Thật vậy, vì vết trái là hàm giảm theo  $a$  nên ta chỉ cần chứng minh khi  $a = b$ , bất  
 đẳng thức trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{4c-2b}{2b^2+c^2} + \frac{6b-3c}{2c^2+b^2} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & 5c^3 + 2c^2b - 2b^2c + 10b^3 \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

Nếu  $c \leq 2a$  thì ta coi bất đẳng thức cần chứng minh như. Nếu  $c \geq 2a$  thì ta coi

bất đẳng thức trên, với chú ý rằng  $(c-a)^2 \leq 3(b-a)^2 + \frac{3}{2}(c-b)^2$ , ta coi

$$\begin{aligned} & \frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq \\ & \geq \left( \frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{3(2a-c)}{2c^2+a^2} \right) \cdot (b-a)^2 + \left( \frac{2c-b}{2b^2+c^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \right) \cdot (c-b)^2 \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Tóm lại, ta luôn có

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2} \cdot (a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2} \cdot (b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2} \cdot (c-a)^2 \geq 0 \quad (\text{đpcm})$$

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 103. (Vô Quốc Bài Căn)

Cho  $n$  số thực  $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$  thỏa  $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$ . Chứng minh rằng

$$3 \sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n \sqrt{a_i^2 + 8}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - 1}{a_i} &= 0 \end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{i=1}^n \frac{8(a_i^2 - 1)}{3a_i + \sqrt{a_i^2 + 8}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - 1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_i^2}}} \geq 0$$

Không mất tính tổng quát, ta coi thế giới số  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ .

Khi này để thay  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{a_1^2 - 1}{a_1} \geq \frac{a_2^2 - 1}{a_2} \geq \dots \geq \frac{a_n^2 - 1}{a_n} \\ \frac{1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_1^2}}} \geq \frac{1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_2^2}}} \geq \dots \geq \frac{1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_n^2}}} \end{array} \right.$  nên theo bất đẳng

thức Chebyshev, ta coi

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - 1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_i^2}}} \geq \frac{1}{n} \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 - 1}{a_i} \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{3 + \sqrt{1 + \frac{8}{a_i^2}}} \right) = 0$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$ .

#### Bài toán 104.

Cho các số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc \geq 2 \left( \frac{b+c}{2} - a \right)^3$$

*Lời giải.*

Đặt

$$f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 2 \left( a - \frac{b+c}{2} \right)^3$$

Khi này ta cần chứng minh

$$f(a, b, c) \geq 0$$

Trước hết, ta chứng minh

$$f(a, b, c) \geq f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 2\left(a - \frac{b+c}{2}\right)^3 \geq \\ &\geq a^3 + \frac{(b+c)^3}{4} - 3a \cdot \left(\frac{b+c}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{b+c}{2}\right)^3 \\ &\Leftrightarrow \frac{4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3}{4} + \frac{3a((b+c)^2 - 4bc)}{4} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{3(b-c)^2(b+c)}{4} + \frac{3a(b-c)^2}{4} \geq 0 \quad (\text{ñúng}) \end{aligned}$$

Vậy (\*) ñúng.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f(a, t, t) \geq 0 \quad (**)$$

trong ñiều  $t = \frac{b+c}{2}$ .

Ta có

$$\begin{aligned} (**) &\Leftrightarrow a^3 + 2t^3 - 3at^2 + 2(a-t)^3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-t)^2(a+2t) + 2(a-t)^3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 3a(a-t)^2 \geq 0 \quad (\text{ñúng}) \end{aligned}$$

Từ (\*) và (\*\*), ta suy ra ñiều phải chứng minh.

Ñáng thú vị xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$  hoặc  $a = 0, b = c$ .

**Bài toán 105.**

Chứng minh rằng với mọi số dương  $a, b, c$  thì

$$a) \frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{2}}$$

$$b) \sqrt{\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}} + \sqrt{\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}} + \sqrt{\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}} \geq \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}{\sqrt{3}}$$

*Lời giải.*

a) Đặt  $a = x^2, b = y^2, c = z^2$  ( $x, y, z > 0$ ). Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}} \geq \frac{x+y+z}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}} + \frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}} \right)^2 \geq \left( \frac{x+y+z}{\sqrt{2}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{2x^4}{x^2+y^2} + \sum_{cyc} \frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}} \geq (x+y+z)^2 \end{aligned}$$

Lưu ý rằng  $\sum_{cyc} \frac{x^4}{x^2+y^2} - \sum_{cyc} \frac{y^4}{x^2+y^2} = 0$

Do nội bất đẳng thức cần chứng minh tổng đồng với

$$\sum_{cyc} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} + \sum_{cyc} \frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}} \geq (x+y+z)^2$$

Để thấy  $\left( \frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{z^2x^2}{\sqrt{z^2+x^2}} \right)$  và  $\left( \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}, \frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}} \right)$  là

2 dãy đơn điệu ngược chiều nhau nên theo bất đẳng thức sắp xếp lại, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}} \geq \sum_{cyc} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Do nội bất đẳng thức cần chứng minh đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} + \sum_{cyc} \frac{4x^2y^2}{x^2 + y^2} \geq (x + y + z)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} x^2 + \sum_{cyc} \frac{2x^2y^2}{x^2 + y^2} \geq 2(xy + yz + zx) \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{2} \cdot \sum_{cyc} (x - y)^2 \geq \sum_{cyc} \frac{xy(x - y)^2}{x^2 + y^2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{(x - y)^4}{x^2 + y^2} \geq 0 \quad (\text{ñuïng}) \\ \Rightarrow & \text{ñpcm.} \end{aligned}$$

Ñuïng thuoïc xay ra khi vaø chæ khi  $a = b = c$ .

b) Ñaët  $a = x^2, b = y^2, c = z^2$  ( $x, y, z > 0$ ). Baø ñuïng thuoïc caàn chöng minh tröôù thanh

$$\begin{aligned} & \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}} + \frac{y^3}{\sqrt{y^4 + y^2z^2 + z^4}} + \frac{z^3}{\sqrt{z^4 + z^2x^2 + x^4}} \geq \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + x^2y^2 + y^4}} + \frac{y^3}{\sqrt{y^4 + y^2z^2 + z^4}} + \frac{z^3}{\sqrt{z^4 + z^2x^2 + x^4}} \right)^2 \geq \left( \frac{x + y + z}{\sqrt{3}} \right)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{x^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4} + 2 \sum_{cyc} \frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)}} \geq \\ & \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}{3} \end{aligned}$$

Löu yù raïng  $\sum_{cyc} \frac{x^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4} - \sum_{cyc} \frac{y^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4} = 0$

Do ñoù baø ñuïng thuoïc caàn chöng minh töông ñöông vöù

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cdot \sum_{cyc} \frac{x^6 + y^6}{x^4 + x^2y^2 + y^4} + 2 \sum_{cyc} \frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2y^2 + y^4)(y^4 + y^2z^2 + z^4)}} \geq \\ & \geq \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx}{3} \end{aligned}$$



$$\Leftrightarrow 6 \sum_{\text{cyc}} \frac{x^3 y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2 y^2 + y^4)(y^4 + y^2 z^2 + z^4)}} \geq \frac{1}{2} \cdot \sum_{\text{cyc}} \left( x^2 + y^2 + 4xy - \frac{3(x^6 + y^6)}{x^4 + x^2 y^2 + y^4} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{6x^3 y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2 y^2 + y^4)(y^4 + y^2 z^2 + z^4)}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{6x^3 y^3 - (x-y)^4 (x+y)^2}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}$$

Mặt khác, để thay  $\left( \frac{x^3 y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2 y^2 + y^4)}}, \frac{y^3 z^3}{\sqrt{(y^4 + y^2 z^2 + z^4)}}, \frac{z^3 x^3}{\sqrt{(z^4 + z^2 x^2 + x^4)}} \right)$  vào

$\left( \frac{1}{\sqrt{(x^4 + x^2 y^2 + y^4)}}, \frac{1}{\sqrt{(y^4 + y^2 z^2 + z^4)}}, \frac{1}{\sqrt{(z^4 + z^2 x^2 + x^4)}} \right)$  là hai dãy đơn điệu

ngược chiều nhau nên theo bất đẳng thức sắp xếp lại, ta có

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{x^3 y^3}{\sqrt{(x^4 + x^2 y^2 + y^4)(y^4 + y^2 z^2 + z^4)}} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{x^3 y^3}{x^4 + x^2 y^2 + y^4}$$

Tõõnày, ta suy ra ñiều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 106. (Phan Thanh Việt)

Cho các số không âm  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^4}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^4}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c}$$

*Lời giải.*

Ta có

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{a + b + c} = \frac{(a + b + c) \left( \sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} ab \right) + 3abc}{a + b + c} = \frac{3abc}{a + b + c} + \sum_{\text{cyc}} a^2 - \sum_{\text{cyc}} ab$$

Do ñiều bất đẳng thức cần chứng minh tổng ñồng với

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{a^2 + ab + b^2} - \sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab \geq \frac{3abc}{a + b + c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^4}{a^2 + ab + b^2} - a^2 + ab \right) \geq \frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{ab^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{3abc}{a+b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\left( \sum_{\text{cyc}} \frac{ab^3}{a^2 + ab + b^2} \right) \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + ab + b^2}{ab} \right) \geq (a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{ab^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3 + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2}{ab}}$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức này cho, ta cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3 + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 + b^2}{ab}} \geq \frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \geq 9abc + 3 \sum_{\text{cyc}} c(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad (\text{nếu theo bất AM-GM})$$

$$\Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 107.

Chứng minh rằng với mọi số dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2}{(2a+b)(1+ab)} + \frac{b^2}{(2b+c)(1+bc)} + \frac{c^2}{(2c+a)(1+ca)} \geq \frac{1}{2}$$

*Lời giải.*

Do  $\begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$  nên tồn tại các số dương  $x, y, z$  sao cho  $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$  và  $c = \frac{z}{x}$ .

Khi nội bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{x^2 y^2}{z(z^2 + 2xy)(x+y)} \geq \frac{1}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{x^2 y^2}{z(z^2 + 2xy)(x+y)} &= \frac{1}{xyz} \cdot \sum_{cyc} \frac{x^4 y^4}{xy(z^2 + 2xy)(x+y)} \\ &\geq \frac{1}{xyz} \cdot \frac{(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)^2}{\sum_{cyc} xy(z^2 + 2xy)(x+y)} \\ &= \frac{1}{xyz} \cdot \frac{(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)^2}{2xyz(xy + yz + zx) + 2 \sum_{cyc} x^2 y^2 (x+y)} \\ &= \frac{(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)^2}{2xyz(x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2)(x+y+z)} \\ &= \frac{x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2}{2xyz(x+y+z)} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài toán 108. (Vasile Cirtoaje)

Cho các số thực  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2) \geq 1+abc+a^2b^2c^2$$

*Lời giải.*

Sử dụng bất đẳng thức

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2) = 1+a^2b^2 + (a-b)^2 + (1-a)^2(1-b)^2$$

Ta có

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2) \geq 1+a^2b^2$$

Do nội hàm chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta cần chứng minh

$$3(1+a^2b^2)(1-c+c^2) \geq 2(1+abc+a^2b^2c^2)$$

$$\Leftrightarrow f(c) = (3+a^2b^2)c^2 - (3+2ab+3a^2b^2)c + 1+3a^2b^2 \geq 0$$

Ta có

$$\Delta_f = -3(1-ab)^4 \leq 0$$

Do đó

$$f(c) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = 1$ .

### Bài toán 109. (Vasile Cirtoaje)

Chứng minh rằng với mọi số không âm  $a, b, c, d$  thỏa  $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$  ta có bất đẳng thức

$$(a+b)(c+d) \geq 2(ab+cd)$$

*Lời giải.*

Đặt  $f(a, b, c, d) = (a+b)(c+d) - 2(ab+cd)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $c+d \geq a+b \geq 0$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) - f\left(a, b, \sqrt{c^2 - cd + d^2}, \sqrt{c^2 - cd + d^2}\right) &= \\ &= (a+b)\left(c+d - 2\sqrt{c^2 - cd + d^2}\right) + 2(c-d)^2 \\ &= (c-d)^2 \left(2 - \frac{3(a+b)}{c+d + 2\sqrt{c^2 - cd + d^2}}\right) \\ &\geq 0 \quad (\text{do } c+d \geq a+b \geq 0) \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} f(a, b, c, d) &\geq f\left(a, b, \sqrt{c^2 - cd + d^2}, \sqrt{c^2 - cd + d^2}\right) \\ &= f\left(a, b, \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) \end{aligned} \quad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f\left(a, b, \sqrt{a^2 - ab + b^2}, \sqrt{a^2 - ab + b^2}\right) \geq 0 \quad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow 2(a+b)\sqrt{a^2 - ab + b^2} \geq 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(a^2-ab+b^2) \geq (a^2+b^2)^2$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Từ (1) và (2), ta suy ra nhiều phải chứng minh.

### Bài toán 110. (Phạm Kim Hùng)

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{c^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a+b+c}.$$

#### Lời giải.

Ta có

$$\begin{aligned} & \left(a + \frac{b^2}{c}\right)^2 + \left(b + \frac{c^2}{a}\right)^2 + \left(a + \frac{c^2}{b}\right)^2 \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} a^2 + 2 \sum_{\text{cyc}} \frac{ab^2}{c} + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^4}{b^2} \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a+b+c} \\ \Leftrightarrow & 2 \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{ab^2}{c} + ac - 2ab \right) + \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^4}{b^2} + b^2 - 2a^2 \right) + \\ & + 2 \left( \sum_{\text{cyc}} ab - \sum_{\text{cyc}} a^2 \right) \geq \frac{12(a^3 + b^3 + c^3)}{a+b+c} - 4(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} (b-c)^2 \left( \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} - 4 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Đặt

$$S_a = \frac{b^2}{c^2} + \frac{4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} - 4$$

$$S_b = \frac{c^2}{a^2} + \frac{4b}{a+b+c} + \frac{2(b+c)}{a} - 4$$

$$S_c = \frac{a^2}{b^2} + \frac{4c}{a+b+c} + \frac{2(c+a)}{b} - 4$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Coi 2 trường hợp xảy ra

+ **Trường hợp 1.**  $c \geq b \geq a > 0$ . Khi ñoij ta coi  $S_b \geq 0$ .

Ta coi

$$S_a + S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(a+b)}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{2(b+c)}{a} - 8 \geq 0$$

$$\forall \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \frac{2a}{c} + \frac{2c}{a} \geq 4, \frac{2b}{a} \geq 2$$

$$S_c + S_b = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(b+c)}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} + \frac{2(b+c)}{a} - 8 \geq 0$$

$$\forall \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2, \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \geq 4, \frac{2c}{a} \geq 2$$

Do ñoij

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.**  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi ñoij ta coi  $S_a \geq 1, S_c \geq -1$ .

Ta coi

$$S_a + 2S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{4(b+c)}{a} - 12 \geq 0$$

$$\forall \frac{4a+8b}{a+b+c} \geq 4, \frac{2a}{c} + \frac{2b}{a} \geq 4, \frac{2c}{a} + \frac{2a}{c} \geq 4$$

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 20 \\ &\geq \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 16 = f(b) \end{aligned}$$

Đe ñang kiểm tra  $f(b)$  la ñham ñoing bien. Do ñoij

$$f(b) \geq f(c) = \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16c}{a} + \frac{2a}{c} - 9 \geq 2\sqrt{32} - 9 > 1$$

+ **Khai ñang 2.1.**  $a+c \leq 2b \Leftrightarrow 2(b-c) \geq a-c \geq 0 \wedge b-c \geq a-b \geq 0$ .

Neu  $S_b \geq 0$  thì ta coi ngay ñpcm. Neu  $S_b \leq 0$ , thì

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 4S_b - 1)(b-c)^2 \geq 0$$

+ **Khai triển 2.2.**  $a + c \geq 2b$ . Khi đó ta sẽ chứng minh  $S_c + 2S_b \geq 0$ . Thật vậy,

ta có

$$S_c + 2S_b = \frac{a^2}{b^2} + \frac{2c^2}{a^2} + \frac{8b+4c}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} + \frac{4(b+c)}{a} - 12 = g(c)$$

+ **Khai triển 2.2.1.**  $a \geq 2b$ . Khi đó do  $g(c)$  là hàm tăng nên

$$g(c) \geq g(0) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b}{a+b} + \frac{4b}{a} + \frac{2a}{b} - 12 \geq 0$$

$$\text{Vì } \frac{a}{b} + \frac{9b}{a+b} \geq 5, \frac{a}{b} + \frac{4b}{a} \geq 4, \frac{a^2}{b^2} + \frac{a}{b} \geq 6, \frac{-b}{a+b} \geq -\frac{1}{3}$$

+ **Khai triển 2.2.2.**  $a \leq 2b$ . Khi đó do  $g(c)$  là hàm tăng nên

$$g(c) \geq g(2b-a) = \frac{a^2}{b^2} + \frac{8b^2}{a^2} + \frac{4b}{a} - \frac{4a}{3b} - \frac{14}{3} \geq 0 \quad (\text{do } 2b \geq a \geq b)$$

Vậy

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{ñpcm})$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

**Bài toán 111.**

Chứng minh rằng với mọi số dương  $a, b, c, d$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)} + \frac{c(b+d)}{d(b+c)} + \frac{d(c+a)}{a(c+d)} + \frac{a(d+b)}{b(d+a)} \geq 4$$

**Lời giải.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
& (a+c)\left(\frac{b}{c(a+b)} + \frac{d}{a(c+d)}\right) + (b+d)\left(\frac{c}{d(b+c)} + \frac{a}{b(d+a)}\right) \geq 4 \\
& \Leftrightarrow (abc + abd + acd + bcd)\left(\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)} + \frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right) \geq 4 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)}\right) \geq 4
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{a}\right)}\right) \geq \\
& \geq 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2} + \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)^2}\right) \\
& = 4
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

### Bài toán 112. (Voi Quốc Bài Căn)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{2}{a+2b} + \frac{2}{b+2c} + \frac{2}{c+2a} \geq \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}$$

*Lời giải.*

Trước hết, ta chứng minh Bô-nê sau

**Bô-nê** Với mọi số thực dương  $x, y, z$  ta có bất đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 + 2(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x)$$

*Chứng minh.*

Ta có



$$\begin{aligned}
& x^3 + y^3 + z^3 + 2(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 3(x^2y + y^2z + z^2x) \\
& \Leftrightarrow 3(x^3 + y^3 + z^3) + 6(xy^2 + yz^2 + zx^2) \geq 9(x^2y + y^2z + z^2x) \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (2x^3 + y^3 - 3x^2y) + 6 \left( \sum_{cyc} xy^2 - \sum_{cyc} x^2y \right) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2(2x+y) + 6(x-y)(y-z)(z-x) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2(2x+y) + 2 \sum_{cyc} (x-y)^3 \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2(4x-y) \geq 0
\end{aligned}$$

Đặt  $S_x = 4y - z, S_y = 4z - x, S_z = 4x - y$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành  $S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$

Có 2 trường hợp xảy ra

\* **Trường hợp 1.**  $x \leq y \leq z$ . Khi đó ta có  $S_y \geq 0$ . Ta lại có

$$\begin{aligned}
S_y + S_z &= 4z - y + 3x \geq 0 \\
S_y + S_x &= 3z + 4y - x \geq 0
\end{aligned}$$

Chú ý rằng  $(z-x)^2 \geq (x-y)^2 + (y-z)^2$  nên ta có

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (S_x + S_y)(y-z)^2 + (S_y + S_z)(x-y)^2 \geq 0$$

\* **Trường hợp 2.**  $x \geq y \geq z \Rightarrow S_x, S_z \geq 0$ . Nếu  $S_y \geq 0$  thì ta cũng ngay lập tức

chắc chắn xét trường hợp  $S_y \leq 0$  lại

+ **Trường hợp 2.1.**  $2y \geq x + z \Rightarrow 2y \geq x$ . Khi đó ta có

$$\begin{aligned}
S_x + 2S_y &= 4y - 2x + 7z \geq 0 \\
S_z + 2S_y &= 2x - y + 8z \geq 0
\end{aligned}$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Bunhiacopski thì  $(z-x)^2 \leq 2(x-y)^2 + 2(y-z)^2$ .

Do đó

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (S_x + 2S_y)(y-z)^2 + (2S_y + S_z)(x-y)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.2.**  $x + z \geq 2y \Leftrightarrow 2(x-y) \geq x - z \geq 0$ .

+ **Trường hợp 2.2.1.**  $(\sqrt{3}-1)x+z \geq \sqrt{3}y \Leftrightarrow \sqrt{3}(x-y) \geq x-z \geq 0$ . Khi ño

ta coi

$$S_z + 3S_y = x - y + 12z \geq 0$$

Do ño

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq (3S_y + S_z)(x-y)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.2.2.**  $(\sqrt{3}-1)x+z \leq \sqrt{3}y \Leftrightarrow y-z \geq (\sqrt{3}-1)(x-y) \geq 0$ .

Khi ño ta coi

$$S_x(\sqrt{3}-1)^2 + 4S_y + S_z = (15-8\sqrt{3})y + 2(6+\sqrt{3})z \geq 0$$

Do ño

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq \left( S_x(\sqrt{3}-1)^2 + 4S_y + S_z \right) (x-y)^2 \geq 0$$

To

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Bo

Ñ

Tr

A

$$t^{3a} + t^{3b} + t^{3c} + 2(t^{a+2b} + t^{b+2c} + t^{c+2a}) \geq 3(t^{2a+b} + t^{2b+c} + t^{2c+a}) \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow t^{3a-1} + t^{3b-1} + t^{3c-1} + 2(t^{a+2b-1} + t^{b+2c-1} + t^{c+2a-1}) \geq 3(t^{2a+b-1} + t^{2b+c-1} + t^{2c+a-1}) \quad \forall t > 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (t^{3a-1} + t^{3b-1} + t^{3c-1} + 2(t^{a+2b-1} + t^{b+2c-1} + t^{c+2a-1})) dt$$

$$\geq \int_0^1 3(t^{2a+b-1} + t^{2b+c-1} + t^{2c+a-1}) dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a} + \frac{1}{3b} + \frac{1}{3c} + \frac{2}{a+2b} + \frac{2}{b+2c} + \frac{2}{c+2a} \geq \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{2b+c} + \frac{3}{2c+a}$$

$$\Rightarrow \text{hpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 113.

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c, d$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a-b}{a+2b+c} + \frac{b-c}{b+2c+d} + \frac{c-d}{c+2d+a} + \frac{d-a}{d+2a+b} \geq 0$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{2a-2b}{a+2b+c} + \frac{2b-2c}{b+2c+d} + \frac{2c-2d}{c+2d+a} + \frac{2d-2a}{d+2a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{2a-2b}{a+2b+c} + 1 \right) + \left( \frac{2b-2c}{b+2c+d} + 1 \right) +$$

$$+ \left( \frac{2c-2d}{c+2d+a} + 1 \right) + \left( \frac{2d-2a}{d+2a+b} + 1 \right) \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a+c}{a+2b+c} + \frac{3b+d}{b+2c+d} + \frac{3c+a}{c+2d+a} + \frac{3d+b}{d+2a+b} \geq 4$$

$$\Leftrightarrow 2 \left( \frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+d} + \frac{c}{c+2d+a} + \frac{d}{d+2a+b} \right) +$$

$$+ \left( \frac{a+c}{a+2b+c} + \frac{b+d}{b+2c+d} + \frac{c+a}{c+2d+a} + \frac{d+b}{d+2a+b} \right) \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+d} + \frac{c}{c+2d+a} + \frac{d}{d+2a+b} =$$

$$= \frac{a^2}{a(a+2b+c)} + \frac{b^2}{b(b+2c+d)} + \frac{c^2}{c(c+2d+a)} + \frac{d^2}{d(d+2a+b)}$$

$$\geq \frac{(a+b+c+d)^2}{a(a+2b+c) + b(b+2c+d) + c(c+2d+a) + d(d+2a+b)}$$

$$= \frac{(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

$$= 1$$

Do ñoù

$$2\left(\frac{a}{a+2b+c} + \frac{b}{b+2c+d} + \frac{c}{c+2d+a} + \frac{d}{d+2a+b}\right) \geq 2 \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\begin{aligned} & \frac{a+c}{a+2b+c} + \frac{b+d}{b+2c+d} + \frac{c+a}{c+2d+a} + \frac{d+b}{d+2a+b} = \\ & = (a+c)\left(\frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{c+2d+a}\right) + (b+d)\left(\frac{1}{b+2c+d} + \frac{1}{d+2a+b}\right) \\ & \geq (a+c) \cdot \frac{4}{(a+2b+c)+(c+2d+a)} + (b+d) \cdot \frac{4}{(b+2c+d)+(d+2a+b)} \\ & = 2 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra ñiều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a=c, b=d$ .

#### Bài toán 114.

Cho các số dương  $a, b, c$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^2}{c^2+ca+a^2} \geq 1$$

*Lời giải.*

Do các vế của bất đẳng thức ñều cho ñồng bậc nên không mất tính tổng quát, ta

có thể giả sử  $abc=1$ . Đặt  $a=\frac{y}{x}, b=\frac{z}{y}, c=\frac{x}{z}$  ( $x, y, z > 0$ ). Khi ñó bất đẳng thức

cần chứng minh trở thành

$$\sum_{cyc} \frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz(x+y+z)}$$

Do ñó ñe ñ chứng minh bất đẳng thức ñầu cho, ta chỉ cần chứng minh

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq x^4 + y^4 + z^4 + x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz(x + y + z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} z^2(x - y)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 115.

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^2 - bc}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} + \frac{b^2 - ca}{\sqrt{7b^2 + 2c^2 + 2a^2}} + \frac{c^2 - ab}{\sqrt{7c^2 + 2a^2 + 2b^2}} \geq 0$$

### Lời giải.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - 2bc}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a - b)(a + c) - (c - a)(a + b)}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a - b)(a + c)}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} - \sum_{cyc} \frac{(c - a)(a + b)}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a - b) \left( \frac{a + c}{\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}} - \frac{b + c}{\sqrt{7b^2 + 2c^2 + 2a^2}} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} S_c (a - b)^2 \geq 0$$

Trong đó

$$S_a = \frac{(2(b + c)(b^2 + c^2) + 4a^3 + 4a(b^2 + c^2) - 3a^2(b + c) - 10abc)\sqrt{2b^2 + 2c^2 + 7a^2}}{(a + b)\sqrt{7c^2 + 2a^2 + 2b^2} + (a + c)\sqrt{7b^2 + 2c^2 + 2a^2}}$$

$$S_b = \frac{(2(c + a)(c^2 + a^2) + 4b^3 + 4b(c^2 + a^2) - 3b^2(c + a) - 10abc)\sqrt{2c^2 + 2a^2 + 7b^2}}{(b + c)\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2} + (a + b)\sqrt{7c^2 + 2a^2 + 2b^2}}$$

$$S_c = \frac{(2(a + b)(a^2 + b^2) + 4c^3 + 4c(a^2 + b^2) - 3c^2(a + b) - 10abc)\sqrt{2a^2 + 2b^2 + 7c^2}}{(a + c)\sqrt{7b^2 + 2c^2 + 2a^2} + (b + c)\sqrt{7a^2 + 2b^2 + 2c^2}}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned} & 2(a+b)(a^2+b^2)+4c^3+4c(a^2+b^2)-3c^2(a+b)-10abc \geq \\ & \geq 8\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+4c^3+8c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-6c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)-10c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ & = (a+b+2c)\left(4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-5c\left(\frac{a+b}{2}\right)+2c^2\right) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Do với  $S_c \geq 0$ . Tổng lại, ta có  $S_a, S_b \geq 0$ .

Vậy

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{hpcm})$$

### Bài toán 116. (Voi Quốc Bài Căn)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 9(a^2+b^2+c^2)$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{a^3}{b} + \sum_{cyc} \frac{a^2b}{c} + 3\sum_{cyc} ab + 2\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} \frac{ab^2}{c} \geq 9\sum_{cyc} a^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{a^3}{b} + \sum_{cyc} \frac{a^2b}{c} + 2\sum_{cyc} \frac{ab^2}{c} \geq 7\sum_{cyc} a^2 - 3\sum_{cyc} ab \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \left(\frac{a^3}{b} + ab - 2a^2\right) + \sum_{cyc} \left(\frac{a^2b}{c} + bc - 2ab\right) + \\ & \quad + 2\sum_{cyc} \left(\frac{ab^2}{c} + ac - 2ab\right) \geq 5\sum_{cyc} a^2 - 5\sum_{cyc} ab \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{a(a-b)^2}{b} + \sum_{cyc} \frac{b(c-a)^2}{c} + 2\sum_{cyc} \frac{a(b-c)^2}{c} \geq \frac{5}{2} \sum_{cyc} (a-b)^2 \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} S_a(b-c)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Trong ñoù

$$S_a = \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{2a}{c} - \frac{5}{2}$$

$$S_b = \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{2b}{a} - \frac{5}{2}$$

$$S_c = \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{2c}{b} - \frac{5}{2}$$

Coi 2 trường ñp xảy ra

+ Trường ñp 1.  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi ñoù ta coi  $S_a \geq 0$ .

+ Trường ñp 1.1.  $S_b \geq 0$ . Khi ñoù ta sẽ ñng minh

$$S_b + S_c \geq 0 \tag{1}$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{2c}{b}\right) + \frac{2c}{a} \geq 5 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{b}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) \geq 5 \end{aligned}$$

Áp dụng bất ñng thức AM-GM, ta coi

$$\begin{aligned} \frac{b}{2c} + \frac{2c}{b} &\geq 2 \\ \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) &\geq \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}} \\ &= \left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{a}{2b} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right) \\ &\geq 2 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \end{aligned}$$

Do ñoù

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{b}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) \geq 4 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} > 5$$

Vậy (1) ñng.

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 1.2.**  $S_b \leq 0$ . Khi này ta sẽ chứng minh

$$S_a + 2S_b \geq 0 \quad (2)$$

$$S_c + 2S_b \geq 0 \quad (3)$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} S_a + 2S_b &= \left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a}\right) + 2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + \frac{3b}{c} - \frac{15}{2} \\ &\geq 4 + 4 + 3 - \frac{15}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (2) đúng.

$$\begin{aligned} S_c + 2S_b &= \left(\frac{a}{b} + \frac{4b}{a}\right) + 2\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \frac{3c}{a} - \frac{15}{2} \\ &\geq 4 + 4 + 0 - \frac{15}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  (3) đúng.

Chú ý rằng  $(a-c)^2 \leq 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$

Do này

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (2S_b + S_c)(a-b)^2 + (S_a + 2S_b)(b-c)^2 \geq 0$$

+ **Trường hợp 2.**  $c \geq b \geq a > 0$ . Khi này ta có  $S_b > 0$ . Theo (1), ta có  $S_b + S_c \geq 0$

Ta sẽ chứng minh

$$S_a + S_b \geq 0 \quad (4)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned} S_a + S_b &= \left(\frac{2b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{2a}{c}\right) + \frac{2b}{c} - 5 \\ &\geq 3 + 2\sqrt{2} + 0 - 5 \\ &> 0 \end{aligned}$$



⇒ (4) đúng.

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_b + S_c)(a-b)^2 + (S_a + S_b)(b-c)^2 \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

⇒ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 117.

Cho các số thực dương  $a, b, c$  thỏa  $abc = 1$ . Chứng minh rằng

$$4 \left( \frac{1}{a(1+bc)^2} + \frac{1}{b(1+ca)^2} + \frac{1}{c(1+ab)^2} \right) \leq 1 + \frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

*Lời giải.*

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} 4 \sum_{cyc} \frac{1}{a(1+bc)^2} &\leq 1 + \frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)} \\ \Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} \frac{a^2}{a(a+abc)^2} &\leq 1 + \frac{16abc}{(a+abc)(b+abc)(c+abc)} \\ \Leftrightarrow 4 \sum_{cyc} \frac{a}{(a+1)^2} &\leq 1 + \frac{16}{(a+1)(b+1)(c+1)} \end{aligned}$$

Đặt  $x = \frac{2}{a+1} - 1, y = \frac{2}{b+1} - 1, z = \frac{2}{c+1} - 1$  thì ta có

$$(1-x)(1-y)(1-z) = (1+x)(1+y)(1+z) \Rightarrow x + y + z + xyz = 0$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\begin{aligned} (1-x)(1+x) + (1-y)(1+y) + (1-z)(1+z) &\leq 1 + 2(1+x)(1+y)(1+z) \\ \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) + 2(x + y + z + xyz) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (x + y + z)^2 &\geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

⇒ đpcm.

**Bài toán 118. (Phạm Văn Thuận)**

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2}$$

**Lời giải.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} & \sum_{cyc} \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{a^3}{b^3 + c^3} \cdot (b + c) \geq \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \left( \frac{a^3}{b^3 + c^3} \cdot (b + c) + b + c \right) \geq 2(a + b + c) + \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & \sum_{cyc} \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3} \cdot (b + c) \geq 2(a + b + c) + \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & (a^3 + b^3 + c^3) \cdot \sum_{cyc} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq 2(a + b + c) + \sqrt{2} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{9}{2(a^2 + b^2 + c^2) - ab - bc - ca}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9(a^3 + b^3 + c^3)}{2(a^2 + b^2 + c^2) - ab - bc - ca} \geq \sqrt{2} + 2(a + b + c) \quad (*)$$

Đặt  $p = a + b + c, q = ab + bc + ca, r = abc \geq 0 \Rightarrow 0 \leq q \leq 1, p = \sqrt{1 + 2q}$ .

Khi đó

$$\begin{aligned} (*) & \Leftrightarrow 9(p(1 - q) + 3r) \geq (2p + \sqrt{2})(2 - q) \\ & \Leftrightarrow 9p - 9pq + 27r \geq 4p - 2pq - \sqrt{2}q + 2\sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow 5p - 7pq + \sqrt{2}q + 27r \geq 2\sqrt{2} \quad (**) \end{aligned}$$

Có 2 trường hợp xảy ra

**+ Trường hợp 1.**  $2q \leq 1$ .

Khi đó

$$(**) \Leftrightarrow f(q) = 5\sqrt{2q+1} - 7q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2q} + 27r \geq 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(q) &= \frac{5}{\sqrt{2q+1}} - 7\sqrt{2q+1} - \frac{7q}{\sqrt{2q+1}} + \sqrt{2} \\ &= \frac{\sqrt{2(2q+1)} - (21q+2)}{\sqrt{2q+1}} \\ &\leq \frac{\sqrt{2(1+1)} - 21q - 2}{\sqrt{2q+1}} \\ &= -\frac{21q}{\sqrt{2q+1}} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(q)$  là hàm nghịch biến.

$$\Rightarrow f(q) \geq f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 27r \geq 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (**)$  đúng.

**+ Trường hợp 2.**  $2q \geq 1$ . Khi đó, theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \geq \frac{4pq - p^3}{9} = \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{p(2q-1)}{9} \geq 0$$

Do đó, để chứng minh (\*\*), ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} 5p - 7pq + \sqrt{2}q + 3p(2q-1) &\geq 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow 2p - pq + \sqrt{2}q &\geq 2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow g(q) = 2\sqrt{2q+1} - q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2}q &\geq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ta có

$$g'(q) = \frac{2}{\sqrt{2q+1}} - \sqrt{2q+1} - \frac{q}{\sqrt{2q+1}} + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2(2q+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} \\
&\geq \frac{\sqrt{2(1+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}} \\
&= \frac{3(1-q)}{\sqrt{2q+1}} \\
&\geq 0 \text{ (do } q \leq 1)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(q)$  là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow g(q) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow (**)$  đúng.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ .

### Bài toán 119. (Belarus 1998)

Chứng minh rằng với mọi số dương  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

*Lời giải.*

**+ Cách 1.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned}
&\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc}{abc} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2 \\
&\Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{1}{6}a - \frac{1}{6}b + \frac{1}{2}c\right)}{abc} \geq \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2 \left( \frac{a-b+3c}{abc} \right) + (b-c)^2 \left( \frac{b-c+3a}{abc} \right) + (c-a)^2 \left( \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \right) \geq 0$$

Đặt

$$S_a = \frac{b-c+3a}{abc}$$

$$S_b = \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$S_c = \frac{a-b+3c}{abc}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành  $S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$

Có 2 trường hợp xảy ra

**+ Trường hợp 1.**  $a \geq c > 0$ .

**+ Trường hợp 1.1.**  $a \geq b \geq c > 0$ . Khi đó, ta có  $S_a, S_c \geq 0$ .

**+ Trường hợp 1.1.1.**  $b+c \geq a$ . Khi đó, ta có

$$S_b = \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{(b+c-a)+2b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$\geq \frac{2}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{2(ab+b(b+c)-2ac)}{ac(a+b)(b+c)} \geq 0$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

**+ Trường hợp 1.1.2.**  $a \geq b+c$ .

Khi đó, xét hàm số  $f(a) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+b}{b+c} - \frac{b+c}{a+b} - 1$  với  $a \geq b+c$

Ta có

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \frac{1}{b} - \frac{c}{a^2} - \frac{1}{b+c} + \frac{b+c}{(a+b)^2} \\
 &= \frac{c}{b(b+c)} - \frac{c}{a^2} + \frac{b+c}{(a+b)^2} \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(a)$  là hàm đồng biến.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(a) &\geq f(b+c) = \frac{b+c}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b+c} - \frac{2b+c}{b+c} - \frac{b+c}{2b+c} - 1 \\
 &= \frac{b}{c} + \frac{c}{b} - \frac{2b}{b+c} - \frac{b+c}{2b+c}
 \end{aligned}$$

Ta lại có

$$f(b+c) > 0 \quad (*)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
 (*) &\Leftrightarrow (b^2 + c^2)(b+c)(2b+c) - 2b^2c(2b+c) - bc(b+c)^2 > 0 \\
 &\Leftrightarrow (b-c)^2(2b+c) + b^2c(b-c) + 2bc^3 > 0 \quad (\text{đúng do } b \geq c > 0)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow (*)$  đúng.

$\Rightarrow f(a) > 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

**+ Trường hợp 1.2.**  $a \geq c \geq b > 0$ . Khi đó, ta có  $S_a, S_c \geq 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned}
 S_b + S_c &= \frac{2b+4c}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\
 &\geq \frac{4c}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\
 &= \frac{2(2(a+b)(b+c) - 3ab)}{ab(a+b)(b+c)} \\
 &= \frac{2(2b^2 + 2bc + 2ac - ab)}{ab(a+b)(b+c)} \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Do  $a \geq c \geq b > 0$  nên  $(a-b)^2 \geq (a-c)^2$ . Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (c-a)^2(S_b + S_c) \geq 0$$

**+ Trường hợp 1.3.**  $b \geq a \geq c > 0$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{b-c+3a}{abc} \geq 0 \\ S_b &= \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{2}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{2(b^2+ab+bc-2ac)}{ac(a+b)(b+c)} \\ &\geq 0 \\ S_a + S_c &= \frac{4a+2c}{abc} \geq 0 \end{aligned}$$

Do  $b \geq a \geq c > 0$  nên  $(b-c)^2 \geq (a-b)^2$ . Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (a-b)^2(S_a + S_c) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.**  $c \geq a > 0$ .

**+ Trường hợp 2.1.**  $c \geq b \geq a > 0$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_c &= \frac{a-b+3c}{abc} \geq 0 \\ S_b &= \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{c+2b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{3(b^2+ab+bc-ac)}{ac(a+b)(b+c)} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_a + S_b &= \frac{2a+4b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\
&\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\
&= \frac{3(b^2 + ab + bc - ac)}{ac(a+b)(b+c)} \geq 0
\end{aligned}$$

Do  $c \geq b \geq a > 0$  nên  $(c-a)^2 \geq (b-c)^2$ . Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (b-c)^2(S_a + S_b) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.2.**  $c \geq a \geq b > 0$ . Khi đó, ta có  $S_c \geq 0$ .

**+ Trường hợp 2.2.1.**  $c \geq a+b > 0$ .

Khi đó, xét hàm số  $g(c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+b}{b+c} - \frac{b+c}{a+b} - 1$  với  $c \geq a+b$

Ta có

$$\begin{aligned}
g'(c) &= \frac{1}{a} - \frac{b}{c^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{(b+c)^2} \\
&= \frac{b}{a(a+b)} - \frac{b}{c^2} + \frac{a+b}{(b+c)^2} \\
&> 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(c)$  là hàm đồng biến.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow g(c) &\geq g(a+b) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{a+2b} - \frac{a+2b}{a+b} - 1 \\
&= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{2a+3b}{a+2b}
\end{aligned}$$

Ta lại có

$$g(a+b) > 0 \quad (**)$$

Thật vậy

$$\begin{aligned}
(**) &\Leftrightarrow (a^2 + b^2)(a+2b) - ab(2a+3b) > 0 \\
&\Leftrightarrow 2b^3 - 2b^2a + a^3 > 0 \quad (\text{đúng})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow (**)$  đúng.



$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} > \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

**+ Trường hợp 2.2.2.**  $a+b \geq c$ . Khi đó, ta có  $S_a \geq 0$ .

Ta có

$$\begin{aligned} S_a + S_b &= \frac{2a+4b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{2c}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{2((a+b)(b+c) - 3ab)}{ab(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{2(ac+bc+b^2-2ab)}{ab(a+b)(b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Do  $c \geq a \geq b > 0$  nên  $(b-c)^2 \geq (c-a)^2$ . Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (c-a)^2(S_a + S_b) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.3.**  $b \geq c \geq a > 0$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_a &= \frac{b-c+3a}{abc} \geq 0 \\ S_b &= \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+a)(c+c)} \\ &= \frac{3}{2ac} \\ &> 0 \end{aligned}$$

**+ Trường hợp 2.3.1.**  $c+a \geq b > 0$ . Khi đó, ta có  $S_b \geq 0$ . Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.3.2.**  $b \geq c+a$ .

Khi đó, xét hàm số  $h(b) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+b}{b+c} - \frac{b+c}{a+b} - 1$  với  $b \geq c+a$ .

Ta có

$$h'(b) = \frac{b^2 - ac}{b^2c} + (c-a) \left( \frac{1}{(b+a)^2} - \frac{1}{(b+c)^2} \right) \geq 0$$

$\Rightarrow h(b)$  là hàm đồng biến.

$$\begin{aligned} \Rightarrow h(b) &\geq h(a+c) = \frac{a}{a+c} + \frac{a+c}{c} + \frac{c}{a} - \frac{2a+c}{a+2c} - \frac{a+2c}{2a+c} - 1 \\ &= \frac{a}{a+c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - \frac{2a+c}{a+2c} - \frac{a+2c}{2a+c} \\ &= \frac{a}{a+c} + \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2 \right) - \left( \frac{2a+c}{a+2c} + \frac{a+2c}{2a+c} - 2 \right) \\ &= \frac{a}{a+c} + \frac{(c-a)^2}{ca} - \frac{(c-a)^2}{(a+2c)(2a+c)} \\ &= \frac{a}{a+c} + (c-a)^2 \left( \frac{1}{ca} - \frac{1}{(2a+c)(a+2c)} \right) \geq 0 \end{aligned}$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### + Cách 2.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \frac{a(a+b)(b+c)}{b} + \frac{b(a+b)(b+c)}{c} + \frac{c(a+b)(b+c)}{a} &\geq \\ &\geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c) \\ \Leftrightarrow \frac{a^2c}{b} + a^2 + ab + ac + \frac{b^2(a+b)}{c} + b^2 + ab + c^2 + bc + \frac{bc(b+c)}{a} &\geq \\ &\geq a^2 + ac + c^2 + 3b^2 + 3ab + 3bc \\ \Leftrightarrow \frac{a^2c}{b} + \frac{b^2(a+b)}{c} + \frac{bc(b+c)}{a} &\geq ab + 2bc + 2b^2 \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a^2c}{b} + \frac{b^3}{c} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{a^2c}{b} + \frac{bc^2}{a} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{b^3}{c} + \frac{bc^2}{a} \right) + b^2 \left( \frac{a}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq ab + \left( \sqrt{ac^3} + \sqrt{\frac{b^4c}{a}} \right) + 2b^2 \\
&\geq ab + 2bc + 2b^2 \\
&\Rightarrow \frac{a^2c}{b} + \frac{b^2(a+b)}{c} + \frac{bc(b+c)}{a} \geq ab + 2bc + 2b^2 \\
&\Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 120.

Chứng minh rằng với mọi số thực không âm  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{3}{ab + bc + ca}$$

### Lời giải.

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $c = \min\{a, b, c\}$ . Khi đó, ta có

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq b^2 - bc + c^2 \leq b^2 \\ 0 \leq c^2 - ca + a^2 \leq a^2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{b^2 - bc + c^2} \geq \frac{1}{b^2} \\ \frac{1}{c^2 - ca + a^2} \geq \frac{1}{a^2} \end{array} \right.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2 - bc + c^2} + \frac{1}{c^2 - ca + a^2} - \frac{3}{ab + bc + ca} \geq \\
&\geq \frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{3}{ab + bc + ca} \\
&\geq \frac{1}{a^2 - ab + b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2} - \frac{3}{ab} \\
&= \frac{(a-b)^4}{a^2b^2(a^2 - ab + b^2)} \\
&\geq 0 \\
&\Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c) = (t, t, 0)$  ( $t > 0$ ).

### Bài toán 121.

Tìm  $k$  lớn nhất sao cho với mọi số không âm  $a, b, c$  ( $(a+b)(b+c)(c+a) > 0$ ) ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq k \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

*Lời giải.*

Cho  $a = b = 1, c = 0$  ta suy ra được  $k \leq \frac{4}{5}$ . Ta chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức

là chứng minh

$$\frac{a}{b^2+c^2} + \frac{b}{c^2+a^2} + \frac{c}{a^2+b^2} \geq \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

**+ Cách 1.**

Do 2 vế của bất đẳng thức trên đồng bậc nên không mất tính tổng quát, ta có thể

giả sử  $a + b + c = 1$ . Đặt  $q = ab + bc + ca, r = abc \Rightarrow \frac{1}{3} \geq q > 0, \frac{1}{27} \geq r \geq 0$ . Khi đó,

ta có

$$\begin{aligned} \sum_{cyc} \frac{a}{b^2+c^2} &= \frac{\sum_{cyc} a(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \\ &= \frac{\sum_{cyc} a(a^2(a^2+b^2+c^2)+b^2c^2)}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2} \\ &= \frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)+abc(ab+bc+ca)}{(1-2q)(q^2-2r)-r^2} \\ &= \frac{(3r+1-3q)(1-2q)+qr}{-r^2-2r(1-2q)+q^2(1-2q)} \\ &= \frac{(3-5q)r+(1-2q)(1-3q)}{-r^2-2r(1-2q)+q^2(1-2q)} \\ \sum_{cyc} \frac{1}{a+b} &= \frac{\sum_{cyc} (a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{\sum_{cyc} (a(a+b+c)+bc)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc} = \frac{q+1}{q-r} \end{aligned}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(3-5q)r + (1-2q)(1-3q)}{-r^2 - 2r(1-2q) + q^2(1-2q)} \geq \frac{4}{5} \cdot \frac{1+q}{-r+q}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = (29q-11)r^2 + (3+32q-71q^2)r + q(1-2q)(5+q)(1-4q) \geq 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} f'(r) &= 2(29q-11)r + 3+32q-71q^2 \\ &\geq 2(29q-11) \cdot \frac{1}{27} + 3+32q-71q^2 \\ &= \frac{59}{27} + \frac{922}{27} \cdot q - 71q^2 \geq 0 \quad (\text{do } 0 \leq q \leq \frac{1}{3}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(r)$  là hàm đồng biến.

+ Nếu  $1 \geq 4q$  thì ta có  $f(r) \geq f(0) = q(1-2q)(5+q)(1-4q) \geq 0$

+ Nếu  $4q \geq 1$  thì theo bất đẳng thức Schur, ta có  $r \geq \frac{4q-1}{9} \geq 0$ . Do đó

$$f(r) \geq f\left(\frac{4q-1}{9}\right) = \frac{2(4q-1)(81q^3 + 103q^2 - 95q + 19)}{81} \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có  $f(r) \geq 0 \Rightarrow \text{đpcm}$ .

Vậy  $k_{\max} = \frac{4}{5}$ .

### + Cách 2.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\begin{aligned} \sum_{\text{cyc}} \frac{5a}{b^2+c^2} &\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{4}{b+c} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{5a(a+b+c)}{b^2+c^2} &\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{4(a+b+c)}{b+c} \\ \Leftrightarrow \sum_{\text{cyc}} \frac{10a^2+10a(b+c)}{b^2+c^2} &\geq 24 + \sum_{\text{cyc}} \frac{8a}{b+c} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 8 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \right) + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} - \frac{9}{2} \right) + \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c) - bc}{b^2 + c^2} - \frac{3}{2} \right) + 9 \left( \sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2 + c^2} - 2 \right) \geq 0$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \quad (1)$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c) - bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b^2 + c^2} \geq 2 \quad (4)$$

### \* Chứng minh (1).

Ta có

$$\begin{aligned} & \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{b^2 + c^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a}{b+c} \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \left( \frac{a^2}{b^2 + c^2} - \frac{a}{b+c} \right) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b) - ca(c-a)}{(b^2 + c^2)(b+c)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)}{(b^2 + c^2)(b+c)} - \sum_{\text{cyc}} \frac{ca(c-a)}{(b^2 + c^2)(b+c)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)}{(b^2 + c^2)(b+c)} - \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)}{(a^2 + c^2)(a+c)} \geq 0 \\ \Leftrightarrow & (a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca) \cdot \sum_{\text{cyc}} \frac{ab(a-b)^2}{(a^2 + c^2)(b^2 + c^2)(a+c)(b+c)} \geq 0 \quad (\text{đúng}) \end{aligned}$$

### \* Chứng minh (2).

Ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} \frac{2a^2 + bc}{b^2 + c^2} \geq \frac{9}{2} \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{4a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} - 3 \right) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^2 - 3(b^2 + c^2) + 2bc}{b^2 + c^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a + 3b - c)(a - b) - (2a - b + 3c)(c - a)}{b^2 + c^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a + 3b - c)(a - b)}{b^2 + c^2} - \sum_{cyc} \frac{(2a - b + 3c)(c - a)}{b^2 + c^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(2a + 3b - c)(a - b)}{b^2 + c^2} - \sum_{cyc} \frac{(3a + 2b - c)(a - b)}{a^2 + c^2} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a - b)^2(2a^2 + 2b^2 - c^2 - c(a + b) + 3ab)}{(b^2 + c^2)(a^2 + c^2)} \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a - b)^2(2a^2 + 2b^2 - c^2 - c(a + b) + 3ab)(a^2 + b^2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_{cyc} (a - b)^2(2a^2 + 2b^2 - 2c^2 + 2ab + (c^2 - c(a + b) + ab))(a^2 + b^2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} (a - b)^2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2) + 2 \sum_{cyc} ab(a - b)^2(a^2 + b^2) - \\
& \quad - (a - b)(b - c)(c - a) \cdot \sum_{cyc} (a - b)(a^2 + b^2) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow 2 \sum_{cyc} (a - b)^2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2) + 2 \sum_{cyc} ab(a - b)^2(a^2 + b^2) - \\
& \quad - (a - b)^2(b - c)^2(c - a)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $a \geq b \geq c \geq 0$ . Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}
& \sum_{cyc} (a - b)^2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2) \geq \\
& \geq (b - c)^2(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2) + (c - a)^2(c^2 + a^2 - b^2)(c^2 + a^2) \\
& \geq (b - c)^2(b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2) + (b - c)^2(c^2 + a^2 - b^2)(b^2 + c^2) \\
& = 2c^2(b - c)^2(b^2 + c^2) \\
& \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) &\geq 2ab(a-b)^2(a^2+b^2) \geq 4(a-b)^2 a^2 b^2 \\
&\geq 4(a-b)^2 (b-c)^2 (c-a)^2 \\
\Rightarrow 2\sum_{cyc} (a-b)^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2) &+ 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) - \\
&- (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

**\* Chứng minh (3).**

Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{a(b+c)-bc}{b^2+c^2} &\geq \frac{3}{2} \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{2a(b+c)-2bc}{b^2+c^2} - 1 \right) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{-(b^2+c^2)+2a(b+c)-2bc}{b^2+c^2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c)(a-b)-(b+c)(c-a)}{b^2+c^2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c)(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyc} \frac{(b+c)(c-a)}{b^2+c^2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b+c)(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyc} \frac{(a+c)(a-b)}{a^2+c^2} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(-c^2+c(a+b)+ab)}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(-c^2+c(a+b)+ab)(a^2+b^2) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2((-c^2+c(a+b)-ab)+2ab)(a^2+b^2) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) + (a-b)(b-c)(c-a) \cdot \sum_{cyc} (a-b)(a^2+b^2) &\geq 0 \\
\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) + (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 &\geq 0 \quad (\text{đúng})
\end{aligned}$$

**\* Chứng minh (4).**

Ta có



$$\sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} - 2 = \frac{\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2+2c^2) + 8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 2$$

Vậy (1), (2), (3) và (4) đúng. Từ đây, ta suy ra đpcm.

Vậy

$$k_{\max} = \frac{4}{5}.$$

### \* Cách 3.

Áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b^2+c^2} \geq \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} ab(a+b)}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} ab(a+b)} \geq \frac{4}{5} \cdot \left( \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} ab(a+b)} \geq \frac{4}{5} \cdot \frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{\sum_{cyc} ab(a+b)+2abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(S+2P)}{Q} \geq \frac{4(S+3P)}{Q+2abc}$$

$$\Leftrightarrow SQ+10abcS+20abcP \geq 2PQ$$

Trong đó  $S = a^2 + b^2 + c^2$ ,  $P = ab + bc + ca$ ,  $Q = \sum_{cyc} ab(a+b)$ .

Dễ thấy

$$PQ = \sum_{cyc} a^2b^2(a+b) + 2abc(S+P)$$

$$SQ \geq \sum_{cyc} ab(a^2+b^2)(a+b) \geq 2 \sum_{cyc} a^2b^2(a+b)$$

Từ đây, ta có ngay đpcm.

Vậy

$$k_{\max} = \frac{4}{5}.$$

### Bài toán 122. (Vasile Cirtoaje)

Chứng minh rằng với mọi số không  $a, b, c$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

*Lời giải.*

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned}(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2) &= (a^2 + a^2 + b^2)(a^2 + c^2 + a^2) \\ &\geq (a^2 + ac + ab)^2 \\ &= a^2(a + b + c)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} \leq \frac{a}{(a + b + c)^2}$$

Tương tự, ta có

$$\begin{aligned}\frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} &\leq \frac{b}{(a + b + c)^2} \\ \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} &\leq \frac{c}{(a + b + c)^2}\end{aligned}$$

Do đó

$$\frac{a^3}{(2a^2 + b^2)(2a^2 + c^2)} + \frac{b^3}{(2b^2 + c^2)(2b^2 + a^2)} + \frac{c^3}{(2c^2 + a^2)(2c^2 + b^2)} \leq \frac{1}{a + b + c}$$

$\Rightarrow$  đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c$ .

### Bài toán 123. (Phạm Kim Hùng)

Chứng minh rằng với mọi dãy số dương  $a_1, a_2, \dots, a_n$  ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq 2 \left( \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

*Lời giải.*

Nếu  $n=1$  thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Xét  $n \geq 2$ .

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có với mọi số dương  $x_1, x_2, \dots, x_n$  thì

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + \dots + a_k) \left( \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} \right) &\geq (x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2 \\ \Rightarrow \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_k} &\leq \frac{1}{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2} \cdot \left( \frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + \dots + \frac{x_k^2}{a_k} \right) \end{aligned}$$

Cho  $k$  chạy từ 1 đến  $n$  rồi cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \leq \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + \dots + \frac{c_n}{a_n}$$

Trong đó

$$c_k = \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^2} + \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1})^2} + \dots + \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Ta có thể chọn  $x_k = k \quad \forall k = \overline{1, n}$ . Khi đó  $\forall k \geq 2$ , ta có

$$\begin{aligned} c_k &= k^2 \left( \frac{1}{(1+2+\dots+k)^2} + \frac{1}{(1+2+\dots+(k+1))^2} + \dots + \frac{1}{(1+2+\dots+n)^2} \right) \\ &= k^2 \left( \frac{4}{k^2(k+1)^2} + \frac{4}{(k+1)^2(k+2)^2} + \dots + \frac{4}{n^2(n+1)^2} \right) \\ &\leq k^2 \left( \frac{4}{k^2(k+1)^2} + \frac{4}{k^2(k+2)^2} + \dots + \frac{4}{k^2(n+1)^2} \right) \\ &\leq 4 \left( \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 4\left(\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}\right) \\
&= 4\left(\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right) \\
&= 4\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{4}{k} \leq 2
\end{aligned}$$

Ngoài ra

$$\begin{aligned}
c_1 &= 1 + \frac{1}{(1+2)^2} + \dots + \frac{1}{(1+2+\dots+n)^2} \\
&= 1 + \frac{4}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{4}{n^2 \cdot (n+1)^2} \\
&\leq 1 + \frac{4}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{4}{2^2 \cdot (n+1)^2} \\
&= 1 + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&\leq 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \\
&< 2
\end{aligned}$$

Do đó

$$c_k \leq 2 \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh.

### **Bài toán 124. (Phạm Văn Thuận, Võ Quốc Bá Cẩn)**

Cho các số không âm  $a, b, c$  thỏa  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

**Lời giải.**

Trước hết, ta xét trường hợp  $a = 0$ . Khi đó, bài toán chuyển về  
 “Các số không âm  $b, c$  thỏa  $b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q = bc(c-b)(c+b) = bc(c^2 - b^2).”$$

Không mất tính, tổng quát ta chỉ cần xét  $c \geq b$  là đủ  $\Rightarrow c^2 \geq \frac{1}{2}$ .

Ta có

$$Q^2 = b^2 c^2 (c^2 - b^2)^2 = c^2 (1 - c^2) (2c^2 - 1)^2 = m(1 - m)(2m - 1)^2 = f(m)$$

Trong đó  $m = c^2 \geq \frac{1}{2}$ .

Ta có

$$f'(m) = (1 - 2m)(8m^2 - 8m + 1)$$

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad (\text{do } m \geq \frac{1}{2})$$

Qua  $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$  thì  $f'(m)$  đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f(m) \leq f\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{4}\right) = \frac{1}{16} \quad \forall m \geq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Q \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $b = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}, c = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ .

Vậy

$$\max Q = \frac{1}{4}.$$

Trở lại bài toán của ta

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $0 \leq a \leq b \leq c$ .

Ta sẽ chứng minh  $\max P = \frac{1}{4}$ , tức là chứng minh

$$F(a,b,c) = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)} \geq 4$$

Khi đó, với mọi  $0 \leq t \leq \min\{a,b,c\}$ , đặt  $x = a - t, y = b - t, z = c - t$ , ta có

$$\begin{aligned} F(a,b,c) &= \frac{((x+t)^2 + (y+t)^2 + (z+t)^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \\ &= \frac{(3t^2 + 2(x+y+z)t + x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \\ &\geq \frac{(2(x+y+z)t + x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \\ &= \frac{4(x+y+z)^2 t^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)t + (x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \\ &\geq \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)t + (x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \\ &\geq \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z)} \\ &= F(x, y, z) \end{aligned}$$

$$\text{(vì hàm số } g(t) = \frac{4(x^2 + y^2 + z^2)(x+y+z)t + (x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)} \text{ là hàm đồng biến)}$$

Áp dụng kết quả này với  $t = a$ , ta được

$$F(a,b,c) \geq F(0, b-a, c-a) = F(0, m, n) = \frac{(m^2 + n^2)^2}{mn(n^2 - m^2)}$$

Với  $n = c - a \geq m = b - a \geq 0$

Do đó, để chứng minh  $F(a,b,c) \geq 4$ , ta chỉ cần chứng minh

$$\begin{aligned} F(0, m, n) &\geq 4 \\ \Leftrightarrow (m^2 + n^2)^2 &\geq 4mn(n^2 - m^2) \end{aligned} \quad (*)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử  $m^2 + n^2 = 1$ . Khi đó

$$(*) \Leftrightarrow nm(n^2 - m^2) \leq \frac{1}{4}$$

Theo chứng minh trên thì bất đẳng thức này đúng, từ đây, ta suy ra đpcm, tức là

$$P \leq \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi  $a = 0, b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, c = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ .

$$\text{Vậy } \max P = \frac{1}{4}.$$

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] T.Andreescu, V.Cirtoaje, G.Dospinescu, M.Lascu, *Old and New Inequalities*
- [2] Hojoo Lee, *Topics In Inequalities*
- [3] Pierre Bornsztein, *Inégalités*
- [4] K.S.Kedlaya, *A < B*
- [5] Thomas J.Mildorf, *Olympiad Inequalities*
- [6] Kin – Yin Li, *Using Tangent to Prove Inequalities*, Mathematical Excalibur, Vol.10, No. 05, Dec.05 – Jan.06
- [7] Lau Chi Hin, *Muirhead's Inequality*, Mathematical Excalibur, Vol.11, No.01, Feb.05 – Mar.06
- [8] *Crux Mathematicorum*
- [9] Phan Huy Khải, *10000 Bài Toán Sơ Cấp – Bất Đẳng Thức Kinh Điển*, NXB Hà Nội 2001
- [10] *Tạp chí Toán Học Và Tuổi Trẻ*
- [11] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức 2006
- [12] *Các trang web toán học:*